

Marcin Kurczab  
Elżbieta Kurczab  
Elżbieta Świda

# MATEMATYKA

Zbiór zadań do liceów i techników

ZAKRES ROZSZERZONY

# 2



OFICyna  
EDUKACYJNA  
WYŻSZEJ SZKOŁY

Projekt okładki i strony tytułowej  
Bożena Sawicka

Rysunki, skład i łamanie  
Artepagina.com – Wojciech Prusakiewicz  
Anna Ugniewska

Redakcja  
Tomasz Sawed

Fotografia na okładce: *Wnętrze sfery*  
Autor: Karolina Kania  
Międzynarodowy Konkurs Fotograficzny „Matematyka w obiektywie”  
[www.mwo.usz.edu.pl](http://www.mwo.usz.edu.pl)

Druk i oprawa  
Druk-Serwis Sp. z o.o.  
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydrukowano na papierze One Buik 65 g  
[www.antalix.pl](http://www.antalix.pl)

© Copyright by Oficyna Edukacyjna – Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.  
Warszawa 2020 r.

Wydanie I, Warszawa 2020 r.

Oficyna Edukacyjna – Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.  
ul. Kościarska 4, 01-695 Warszawa  
[pazdro@pazdro.com.pl](mailto:pazdro@pazdro.com.pl)  
[www.pazdro.com.pl](http://www.pazdro.com.pl)

ISBN 978-83-7594-197-5

## Spis treści

<b>1. Przekształcenia wykresów funkcji</b>	
Wektor w układzie współrzędnych – podstawowe informacje	7
Przesunięcie równoległe. Przesunięcie równoległe wzdłuż osi $OX$	11
Przesunięcie równoległe wzdłuż osi $OY$	15
Symetria osiowa. Symetria osiowa względem osi $OX$ i $OY$	21
Symetria środkowa. Symetria środkowa względem punktu $(0, 0)$	26
Wykres funkcji $y =  f(x) $ oraz $y = f( x )$	28
Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$ oraz $y = f(k \cdot x)$ , gdzie $k \neq 0$	31
Szkicowanie wykresów wybranych funkcji	33
Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności	37
Test sprawdzający do rozdziału 1.	39
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.	42
<b>2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną</b>	
Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej	47
Odległość między liczbami na osi liczbowej. Geometryczna interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej	49
Proste równania z wartością bezwzględną	51
Proste nierówności z wartością bezwzględną	54
Własności wartości bezwzględnej	57
Równania z wartością bezwzględną	59
Nierówności z wartością bezwzględną	60
Równanie liniowe z parametrem	62
Nierówność liniowa z parametrem	63
Równania liniowe z wartością bezwzględną i z parametrem	65
Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem	67
Test sprawdzający do rozdziału 2.	70
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.	71
<b>3. Funkcja kwadratowa</b>	
Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej z klasy 1.	74
Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej	76
Miejsce zerowe funkcji kwadratowej.	
Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej	78
Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu	82
Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności	85
Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym	87
Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne	89

Równania kwadratowe .....	94
Równania prowadzące do równań kwadratowych .....	96
Nierówności kwadratowe .....	98
Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych .....	100
Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego .....	104
Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną .....	106
Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną .....	107
Wzory Viete'a .....	109
Równania i nierówności kwadratowe z parametrem .....	111
Test sprawdzający do rozdziału 3. ....	116
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3. ....	117
<b>4. Geometria płaska – okręgi i koła</b>	
Powtórzenie wiadomości z geometrii z klasy 1. ....	122
Okrąg. Położenie prostej i okręgu .....	129
Wzajemne położenie dwóch okręgów .....	131
Koła i kąty .....	133
Twierdzenie o stycznej i siecznej .....	137
Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie .....	139
Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt .....	142
Test sprawdzający do rozdziału 4. ....	147
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4. ....	149
<b>5. Trygonometria</b>	
Trygonometria kąta ostrego – powtórzenie wiadomości z klasy 1. ....	153
Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta płaskiego .....	155
Podstawowe tożsamości trygonometryczne .....	157
Wybrane wzory redukcyjne .....	161
Kąt skierowany. Miara łukowa kąta .....	163
Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej .....	166
Wykresy funkcji trygonometrycznych .....	169
Test sprawdzający do rozdziału 5. ....	173
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5. ....	174
<b>6. Geometria analityczna</b>	
Odcinek w układzie współrzędnych .....	177
Równanie kierunkowe prostej .....	178
Równanie ogólne prostej .....	182
Równanie okręgu .....	184
Wyznaczanie w układzie współrzędnych punktów wspólnych prostych, okręgów i parabol .....	186
Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej .....	188
Test sprawdzający do rozdziału 6. ....	190
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6. ....	192

<b>7. Geometria płaska – rozwiązywanie trójkątów, pole trójkąta, pole koła</b>	
Twierdzenie sinusów .....	195
Twierdzenie cosinusów .....	197
Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów do rozwiązywania zadań .....	198
Pole figury płaskiej .....	201
Pole trójkąta, cz. 1 .....	202
Pole trójkąta, cz. 2 .....	206
Pole trójkątów podobnych .....	209
Pole koła, pole wycinka koła .....	212
Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń .....	215
Test sprawdzający do rozdziału 7. ....	217
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7. ....	219
<b>8. Wielomiany</b>	
Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej .....	223
Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów .....	225
Równość wielomianów .....	227
Wzory skróconego mnożenia stopnia 3. Wzór na $a^n - b^n$ .....	229
Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu .....	231
Podzielność wielomianów .....	233
Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy. Schemat Hornera .....	236
Dzielenie wielomianu przez wielomian stopnia większego od 1 .....	238
Pierwiastek wielomianu. Twierdzenie Bezouta .....	240
Pierwiastki wymierne wielomianu .....	243
Pierwiastek wielokrotny .....	245
Rozkładanie wielomianów na czynniki .....	247
Równania wielomianowe .....	250
Zadania prowadzące do równań wielomianowych .....	253
Równania wielomianowe z parametrem .....	254
Funkcje wielomianowe .....	256
Nierówności wielomianowe .....	260
Test sprawdzający do rozdziału 8. ....	262
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 8. ....	263
Odpowiedzi do zadań .....	268
Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych .....	372

Symbolem  $\square$  zostały oznaczone zadania na dowodzenie.

# 1. Przekształcenia wykresów funkcji

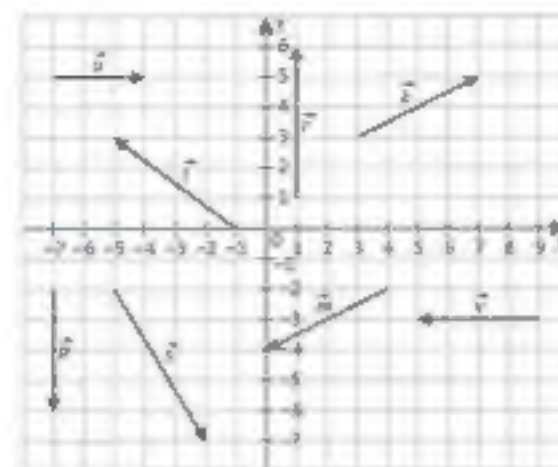
## Wektor w układzie współrzędnych – podstawowe informacje

1.1. W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj podane wektory. Początek każdego wektora obierz dowolnie.

a)  $\vec{a} = [5, 0]$       b)  $\vec{b} = [-3, 0]$       c)  $\vec{c} = [0, 1]$       d)  $\vec{d} = [0, -4]$

e)  $\vec{e} = [-1, 3]$       f)  $\vec{f} = [2, -5]$       g)  $\vec{g} = [-3, -1]$       h)  $\vec{h} = [2, 4]$

1.2. Odczytaj z rysunku współrzędne wektorów:



1.3. Oblicz współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$ , jeśli:

a)  $A(-2, 3), B(4, 0)$       b)  $A(0, -\sqrt{3}), B(2, 2\sqrt{3})$

c)  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), B(1, 3)$       d)  $A(-4, 8), B\left(5\frac{1}{2}, -6\right)$

1.4. Oblicz współrzędne wektorów  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$  jeśli:  $A(-2, -3)$

$B(1, -4), C(-4, 5)$ .



1.5. Oblicz długość wektorów:

a)  $\vec{u} = [-5, 12]$     b)  $\vec{v} = \left[4\frac{1}{2}, 6\right]$     c)  $\vec{p} = [-11, -60]$     d)  $\vec{s} = [2, -\sqrt{5}]$

1.6. Oblicz długość wektora  $\overrightarrow{AB}$ , jeśli:

a)  $A(2, 3); B(-1, 5)$     b)  $A(4, 0); B(6, -1)$   
 c)  $A(-6, -2); B(20, 5)$     d)  $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right); B(1, -2)$

1.7. Wyznacz współrzędne punktu B, jeśli:

a)  $A(0, 4); \overrightarrow{AB} = [-3, 5]$     b)  $A(-2, 5); \overrightarrow{AB} = [1, 8]$   
 c)  $A(4, -3); \overrightarrow{AB} = [0, -6]$     d)  $A(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}); \overrightarrow{AB} = [3\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$

1.8. Wyznacz współrzędne punktu A, jeśli:

a)  $B(-1, 6); \overrightarrow{AB} = [4, -1]$     b)  $B(2, -9); \overrightarrow{AB} = [-3, 2]$   
 c)  $B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right); \overrightarrow{AB} = \left[\frac{1}{2}, -4\right]$     d)  $B(\sqrt{3}, -5); \overrightarrow{AB} = [2\sqrt{3}, 0]$

1.9. Dane są punkty  $A(-1, -3), B(-4, 3), C(2, 0), D(2, -9), E(-1, 6)$ . Sprawdź, które z wektorów  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CE}$  są równe, a które przeciwne.

1.10. Na odcinku AB wyznacz punkt P tak, aby wektory  $\overrightarrow{AP}$  i  $\overrightarrow{PB}$  były sobie równe.

a)  $A(-3, 2); B(5, 6)$     b)  $A(-4, 5); B(1, 0)$

1.11. Dane są punkty A i B. Wyznacz współrzędne środka S odcinka AB trzema sposobami: 1) ze wzorów; 2) z równości wektorów  $\overrightarrow{AS}$  i  $\overrightarrow{SB}$ ; 3) z informacji, że wektory  $\overrightarrow{SA}$  i  $\overrightarrow{SB}$  są przeciwnie.

a)  $A(-10, 4); B(6, -2)$     b)  $A(-2, 5); B(4, -3)$   
 c)  $A(-2, 4); B(0, 12)$     d)  $A(-4, -2); B(-3, -5)$

1.12. Punkt S jest środkiem odcinka AB. Wyznacz punkt B, jeśli:

a)  $A(-4, 3); S(0, 1)$     b)  $A(-6, 2); S(3, -1)$   
 c)  $A(-2, 4); \overrightarrow{AS} = [1, -3]$     d)  $A(4, 1); \overrightarrow{SA} = [6, 2]$

1.13. Punkt S jest punktem wspólnym odcinka AB i jego symetralnej. Wyznacz współrzędne punktu A, jeśli:

a)  $S(-2, 1); \overrightarrow{SB} = [5, -4]$     b)  $S(1, -1); \overrightarrow{BS} = [3, 7]$

1.14. Dane są cztery różne punkty A, B, C, D. Jeśli wektory  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{CD}$  są równe, to co można powiedzieć o wektorach  $\overrightarrow{CA}$  i  $\overrightarrow{DB}$ ?

1.15. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AD, EB i FC sześciokąta foremnego ABCDEF. Z danych na rysunku odcinków utwórz wektory, które są równe wektorowi:

a)  $\overrightarrow{AB}$     b)  $\overrightarrow{BC}$   
 c)  $\overrightarrow{ES}$



1.16. Wierzchołki trójkąta ABC mają współrzędne:  $A(-4, -2), B(5, -1), C(1, 3)$ . Oblicz długości boków trójkąta ABC. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny.

1.17. Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A(-2, -3), B(1, 4), C(-1, 3)$ .

- a) Oblicz obwód trójkąta ABC.  
 b) Oblicz długość środkowej BD.

1.18. Dane są punkty A, B, C, D. Sprawdź, czy czworokąt ABCD jest równoległobokiem. Następnie oblicz jego obwód.

a)  $A(-2, 1); B(-1, -1); C(2, 5); D(1, 7)$   
 b)  $A(2, -5); B(7, 0); C(2, 5); D(0, 3)$

1.19. Punkty  $A(-3, -1), B(1, 2), C(2, 5)$  są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku ABCD.

- a) Oblicz współrzędne wierzchołka D.  
 b) Oblicz współrzędne punktu S przecięcia się przekątnych.  
 c) Oblicz długości przekątnych równoległoboku.

1.20. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D równoległoboku ABCD, wiedząc, że  $A(-4, 4), B(-2, -1)$ , a przekątne AC i BD przecinają się w punkcie  $S(-1, 3)$ . Oblicz długości boków tego równoległoboku.

1.21. W trójkącie ABC dane są  $A(-5, 2), C(1, 5)$ . Wiedząc, że  $\overrightarrow{CD} = [-2, -6]$ , gdzie D to środek boku AB, oblicz współrzędne wierzchołka B oraz długość boku AB.

**1.22.** Wyznacz liczby  $m$  i  $n$  wiedząc, że:

- a) wektory  $\vec{a} = [2m+n, m-3n]$  i  $\vec{b} = [m-1, -n+5]$  są równe  
 b) wektory  $\vec{a} = [3m+5n, 2n-6]$  i  $\vec{b} = [m+4, -2n+3]$  są równe  
 c) wektory  $\vec{a} = [3m-4, m-8]$  i  $\vec{b} = [m+2n, m-2n]$  są przeciwno  
 d) wektory  $\vec{a} = [m-n, 2-m]$  i  $\vec{b} = [m+n, n+6]$  są przeciwno.

**1.23.** W kwadracie  $ABCD$  punkt  $E$  jest środkiem boku  $DC$ , zaś punkt  $F$  jest środkiem boku  $BC$ . Wyraź wektor  $\vec{EF}$  w zależności od wektorów  $\vec{AB}$  i  $\vec{AD}$ .

**1.24.** Dany jest sześciokąt foremny  $ABCDEF$  oraz wektory:  $\vec{AB} = \vec{a}$  i  $\vec{AF} = \vec{b}$ . Wyznacz za pomocą wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  wektor:

- a)  $\vec{FD}$                       b)  $\vec{AD}$                       c)  $\vec{DB}$



**1.25.** Punkty  $A, B, C$  mają współrzędne:  $A(2, 4)$ ,  $B(6, 1)$ ,  $C(7, 7)$ . Przedstaw (na oddzielnych rysunkach) następujące wektory i oblicz ich współrzędne:

- a)  $\vec{AB} + \vec{BC}$  o początku w punkcie  $A$   
 b)  $\vec{CB} - \vec{CA}$  o początku w punkcie  $C$   
 c)  $2 \cdot \vec{AC}$  o początku w punkcie  $A$   
 d)  $-2 \cdot \vec{AC}$  o początku w punkcie  $B$   
 e)  $-\frac{3}{2} \cdot \vec{AC}$  o początku w punkcie  $A$ .

**1.26.** Dane są punkty  $A(-5, 1)$ ,  $B(5, 6)$ ,  $C(-2, -3)$ ,  $D(4, 0)$ . Korzystając z własności wektorów wykaż, że:

- a) proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe                      b) proste  $AC$  i  $BD$  nie są równoległe.

**1.27.** Dane są punkty  $A(-2, 2)$ ,  $B(7, -3)$ ,  $C(4, 3)$ ,  $D(2, -6)$ . Korzystając z własności wektorów wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest trapezem i nie jest równoległobokiem.

**1.28.** Korzystając z własności wektorów wykaż, że punkty  $A(-4, 5)$ ,  $B(4, -1)$ ,  $C(8, -4)$  są współliniowe, a punkt  $D(6, -2)$  nie należy do prostej  $AB$ .

**1.29.** Punkty  $A, B, C, D$  mają współrzędne:  $A(-3, 2)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(3, -5)$ ,  $D(-1, -7)$ . Oblicz współrzędne wektorów:

- a)  $\vec{AB} + 2\vec{CD}$                       b)  $3\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AD}$   
 c)  $\vec{AC} + \vec{DB} + \vec{CD} + \vec{BA}$                       d)  $4\vec{AD} - 6\vec{BC} + 5\vec{BD}$

**1.30.** Dane są punkty:  $A(1, -1)$ ,  $B(4, -2)$ ,  $C(10, -9)$ . Wyznacz taki punkt  $D$ , aby  $2 \cdot \vec{AB} - 3 \cdot \vec{CD} = \vec{AC}$ .

**1.31.** Dane są wektory:  $\vec{a} = [1, -1]$ ,  $\vec{b} = [2, 1]$ ,  $\vec{c} = [-5, -7]$ . Wyznacz takie liczby rzeczywiste  $k$  i  $l$ , aby  $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = \vec{c}$ .

**1.32.** Dane są dwa wektory:  $\vec{a} = [3, -1]$  oraz  $\vec{b} = [5, 3]$ . Znajdź taki wektor  $\vec{x}$ , aby:

- a)  $2 \cdot \vec{x} + 3 \cdot \vec{a} = \vec{b}$                       b)  $\frac{1}{3} \cdot \vec{x} + \vec{b} = 2\vec{a}$   
 c)  $\vec{x} = 3 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$                       d)  $\frac{1}{2} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} - 2 \cdot \vec{x}$   
 e)  $3 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 2 \cdot (\vec{x} + \vec{b})$

## Przesunięcie równoległe.

### Przesunięcie równoległe wzdłuż osi $OX$

**1.33.** Wyznacz współrzędne punktu  $A_1$ , będącego obrazem punktu  $A$  w przesunięciu równoległym o wektor  $\vec{u}$ , jeśli:

- a)  $A(9, -1)$ ,  $\vec{u} = [-8, 3]$                       b)  $A(-3, 5)$ ,  $\vec{u} = [6, 0]$                       c)  $A(4, 7)$ ,  $\vec{u} = [1, 3]$

**1.34.** Obrazem punktu  $B$  w przesunięciu równoległym o wektor  $\vec{u}$  jest punkt  $B_1$ . Wyznacz współrzędne punktu  $B$ , jeśli:

- a)  $B_1(1, 2)$ ,  $\vec{u} = [-5, 0]$                       b)  $B_1(3, -2)$ ,  $\vec{u} = [-7, 1]$                       c)  $B_1(5, 1)$ ,  $\vec{u} = [4, 6]$

**1.35.** Funkcja  $f$  jest opisana za pomocą tabel:

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	0	1	2



Wykonaj tabelę, opisującą funkcję  $h$ , której wykres powstanie w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$ :

- a) o 3 jednostki w prawo      b) o 2 jednostki w lewo.

Przeanalizuj dziedziny i zbiory wartości funkcji  $f$  i  $h$ .

**1.36.** Funkcja  $f$  jest opisana za pomocą tabeli  $f(x)$

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-10	-5	0	5	10

Przedstaw za pomocą tabelki funkcję  $g$ , opisaną wzorem:

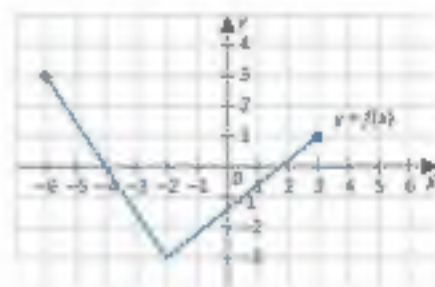
- a)  $g(x) = f(x - 9)$       b)  $g(x) = f(x + 53)$ .

**1.37.** Podaj, o ile jednostek, i w którą stronę należy przesunąć wykres funkcji  $f$  wzdłuż osi  $OX$ , aby otrzymać wykres funkcji:

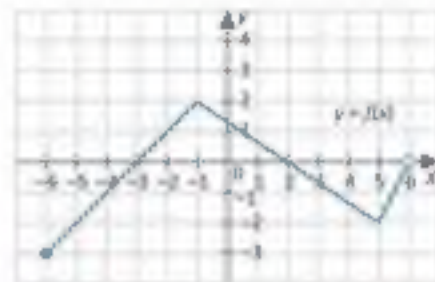
- a)  $y = f(x - 4)$       b)  $y = f(x + 6)$       c)  $y = f(x + 5)$       d)  $y = f(x - 10)$ .

W każdym przypadku podaj współrzędne wektora przesunięcia.

**1.38.** Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Naszkicuj wykresy funkcji  $g(x) = f(x - 4)$  oraz  $h(x) = f(x + 1)$ . Odczytaj z wykresu dziedzinę funkcji  $f$ ,  $g$  oraz  $h$ .

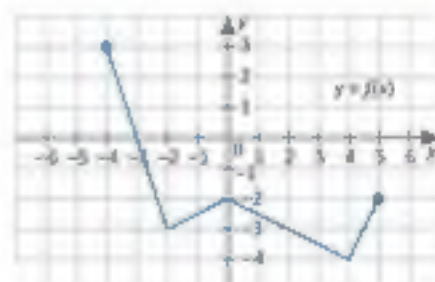


**1.39.** Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Naszkicuj wykresy funkcji  $g(x) = f(x + 3)$  oraz  $h(x) = f(x - 2)$ . Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji  $f$ ,  $g$  oraz  $h$ .



**1.40.** Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Naszkicuj wykresy funkcji  $g(x) = f(x + 2)$  oraz  $h(x) = f(x - 5)$ . Odczytaj z wykresu wartości funkcji  $f$  dla argumentów: -2, 0 oraz 4. Podaj wartość wyrażenia:

- a)  $g(-4) \cdot g(-2) + g(2)$   
b)  $h(3) \cdot [h(5) - h(9)]$ .



**1.41.** Podaj wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji  $f$  wzdłuż osi  $OX$ :

- a) o 3 jednostki w lewo, jeśli  $f(x) = \sqrt{x}$   
b) o 2 jednostki w prawo, jeśli  $f(x) = x^2$   
c) o 5 jednostek w prawo, jeśli  $f(x) = -\frac{1}{2}x$   
d) o 1 jednostkę w lewo, jeśli  $f(x) = |x|$   
e) o 1 jednostkę w lewo, jeśli  $f(x) = x^3$   
f) o 3 jednostki w prawo, jeśli  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

W każdym przypadku naszkicuj wykres funkcji  $g$  oraz podaj współrzędne wektora przesunięcia.

**1.42.** Podaj współrzędne wektora  $\vec{u}$ , wiedząc, że w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$  otrzymano wykres funkcji  $g$ , jeśli:

- a)  $f(x) = 2x^2$  i  $g(x) = 2(x - 5)^2$       b)  $f(x) = \sqrt{x}$  i  $g(x) = \sqrt{x + 10}$   
c)  $f(x) = \frac{2}{x}$  i  $g(x) = \frac{2}{x - 3}$       d)  $f(x) = 0,5x^2$  i  $g(x) = 0,5(x + 8)^2$   
e)  $f(x) = -x^3$  i  $g(x) = -(x - 1)^3$       f)  $f(x) = |x|$  i  $g(x) = |x - 4|$

**1.43.** Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = (x - 3)^2$ , określonej w zbiorze  $\mathbb{R}$ . Odczytaj z wykresu:

- a) wartość funkcji  $g$  dla argumentu 1,  
b) maksymalne przedziały monotoniczności funkcji  $g$ .

**1.44.** Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = \sqrt{x + 2}$ .

- a) Podaj dziedzinę funkcji  $g$ .      b) Podaj miejsca zerowe funkcji  $g$ .

**1.45.** Naszkicuj wykres funkcji  $g$ , opisaną wzorem  $g(x) = \frac{1}{x - 1}$ .

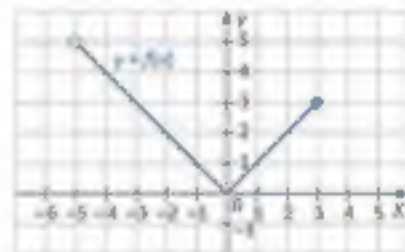
- a) Określ dziedzinę funkcji  $g$ .  
b) Oblicz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji  $g$  przecina oś  $OY$ .  
c) Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja  $g$  jest malejąca.

**1.46.** Funkcję  $f$  określa wzór  $f(x) = x^2$ , gdzie  $x \in \{-2, 2\}$ . Wykres funkcji  $g$  powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u} = [-2, 0]$ .

- Podaj wzór funkcji  $g$ .
- Naszkicuj wykresy funkcji  $f$  i  $g$  w jednym układzie współrzędnych.
- Porównaj miejsca zerowe funkcji  $g$  z miejscem zerowym funkcji  $f$ .

**1.47.** Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji  $f(x) = |x|$ , gdzie  $x \in [-5, 3]$ . Funkcję  $g$  określa wzór  $g(x) = f(x - 4)$ .

- Wyznacz dziedzinę funkcji  $g$ .
- Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji  $g$ .



**1.48.** Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $D_f = \{-8, 7\}$ . Podaj dziedzinę funkcji  $g$ , jeśli:

- $g(x) = f(x + 2)$
- $g(x) = f(x - 10)$
- $g(x) = f(x - 137)$
- $g(x) = f(x + 2009)$

**1.49.** Miejscami zerowymi funkcji  $f$  są liczby  $-4, 0$  oraz  $6$ , a jej zbiorem wartości przedział liczbowy  $[-3, 5]$ . Podaj miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji  $g$ , jeśli  $g(x) = f(x + 8)$ .

**1.50.** Punkty  $\{-2, 5\}$ ,  $\{3, 1\}$ ,  $\{4, -6\}$  należą do wykresu funkcji  $f$ . Podaj trzy punkty, które należą do wykresu funkcji, określonej wzorem:

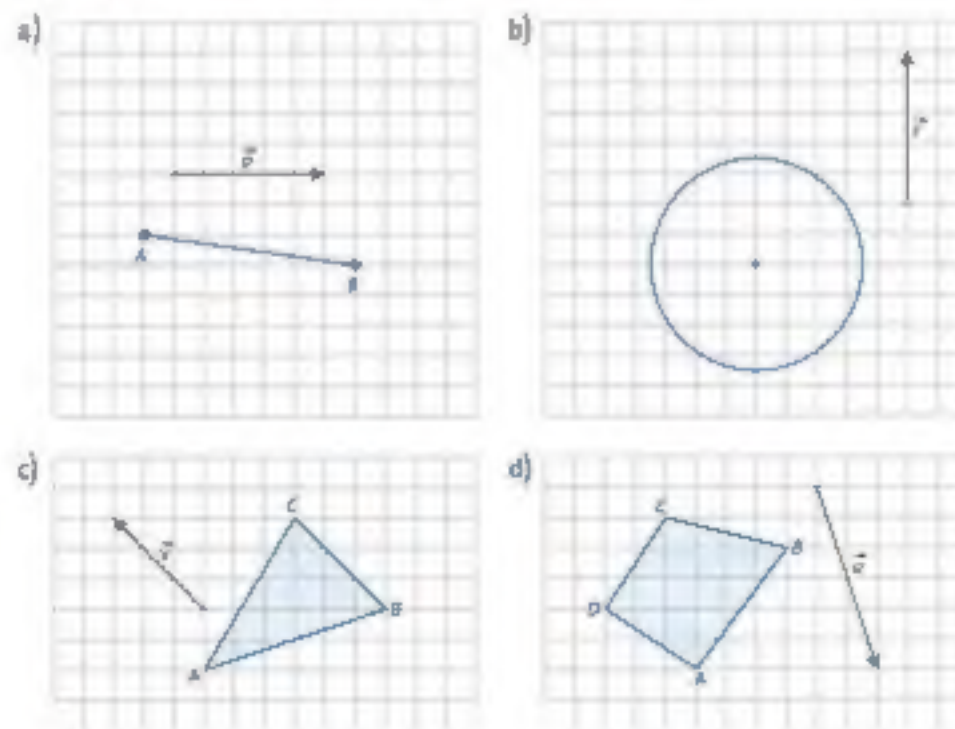
- $g(x) = f(x - 15)$
- $h(x) = f(x + 21)$
- $k(x) = f(x - 7) + x$

**1.51.** Dany jest wzór funkcji  $f$  i współrzędne wektora  $\vec{u}$ . Wyznacz wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ .

- $f(x) = x^2 + 1$ ,  $\vec{u} = [5, 0]$
- $f(x) = 2x - 1$ ,  $\vec{u} = [-3, 0]$
- $f(x) = x^2 - 3x$ ,  $\vec{u} = [-1, 0]$
- $f(x) = (x + 1)(x - 5)$ ,  $\vec{u} = [4, 0]$

## Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OY

**1.52.** Znajdź obrazy następujących figur w przesunięciu równoległym o podany wektor.



**1.53.** Funkcja  $f$  jest opisana za pomocą tabeli:

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	2	0	1	2

Wykonaj tabelę, opisującą funkcję  $h$ , której wykres powstanie w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$ :

- o 2 jednostki do góry
- o 7 jednostek do dołu.

Porównaj dziedziny i zbiory wartości funkcji  $f$  i  $h$ .

**1.54.** Funkcja  $f$  jest opisana za pomocą tabeli:

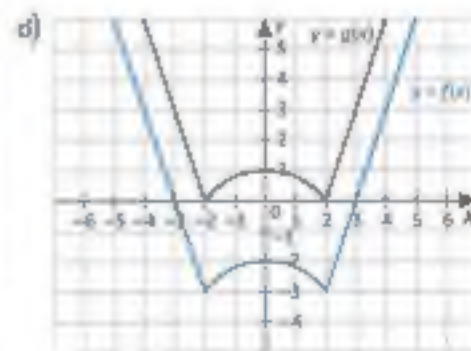
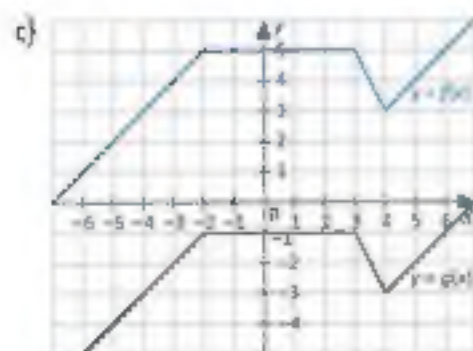
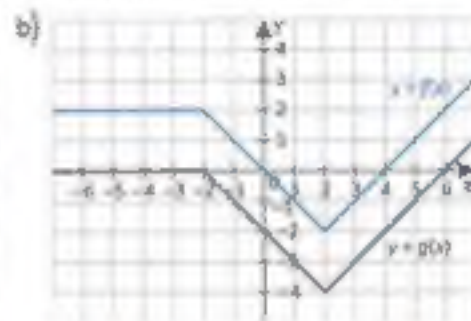
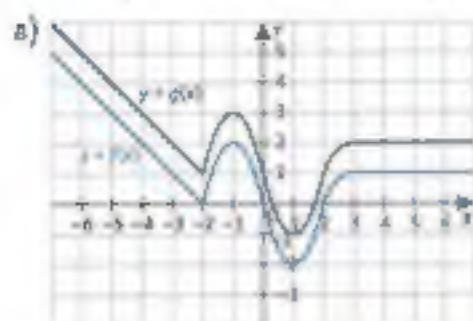
$x$	-3	-2	0	1	6	28
$f(x)$	-4	-1	2	9	11	51

Opisz za pomocą tabelki funkcję określoną wzorem:

- $g(x) = f(x) + 6$
- $g(x) = f(x) - 21$



1.55. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji  $f$ , aby otrzymać wykres funkcji  $g$ ?

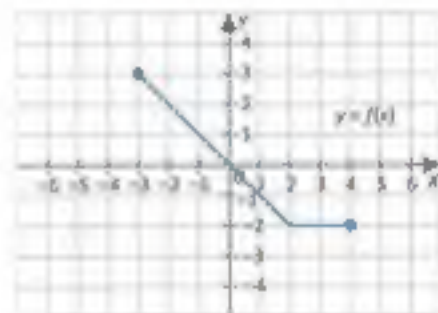


1.56. Podaj, o ile jednostek i w którą stronę należy przesunąć równolegle wykres funkcji  $f$  wzdłuż osi  $OY$ , aby otrzymać wykres funkcji  $g$ , jeśli:

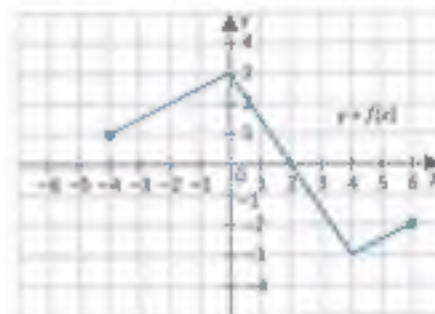
- $g(x) = f(x) - 4$
- $g(x) = f(x) + 2$
- $g(x) = f(x) + 8$
- $g(x) = f(x) - 3$

W każdym przypadku podaj współrzędne wektora przesunięcia.

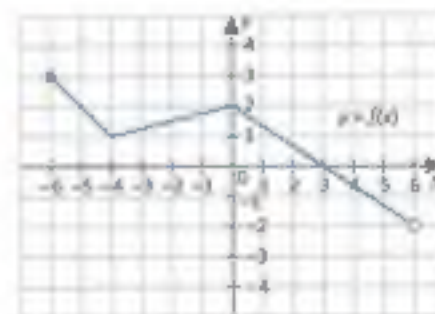
1.57. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Narysuj wykresy funkcji  $g(x) = f(x) - 1$  oraz  $h(x) = f(x) + 4$ . Odczytaj z wykresu wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $\{-2\}$ . Oblicz wartość wyrażenia  $3 \cdot g(-2) - 8 \cdot h(-2)$ .



1.58. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Narysuj wykresy funkcji  $g(x) = f(x) + 5$  oraz  $h(x) = f(x) - 2$ . Odczytaj z rysunku współrzędne punktu, w którym wykres funkcji  $f$  przecina oś  $OY$ . Oblicz wartość wyrażenia  $g(0) \cdot h(0)$ .



1.59. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Narysuj wykresy funkcji  $g(x) = f(x) + 2$  oraz  $h(x) = f(x) - 5$ . Odczytaj współrzędne punktów, w których wykresy funkcji  $f$ ,  $g$  oraz  $h$  przecinają oś  $OY$ . Podaj miejsca zerowe funkcji  $f$ ,  $g$  oraz  $h$  (o ile takie istnieją).



1.60. Podaj wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji  $f$  wzdłuż osi  $OY$ :

- o 5 jednostek do góry, jeśli  $f(x) = -2x + 1$
- o 3 jednostki do dołu, jeśli  $f(x) = \sqrt{x}$
- o 7 jednostek do dołu, jeśli  $f(x) = 3x^2$
- o 4 jednostki do góry, jeśli  $f(x) = |x|$
- o 2 jednostki w dół, jeśli  $f(x) = \frac{4}{x}$
- o 3 jednostki do góry, jeśli  $f(x) = \frac{1}{5}x^3$ .

W każdym przypadku podaj współrzędne wektora przesunięcia.

1.61. Dany jest wzór funkcji  $f$  i wektor  $\vec{u}$ . Podaj wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymamy po przesunięciu równoległym wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ , jeśli

- $f(x) = -4\sqrt{x}$ ,  $\vec{u} = [0, 4]$
- $f(x) = 3x^2$ ,  $\vec{u} = [0, -1]$
- $f(x) = \frac{5}{x}$ ,  $\vec{u} = [0, 2]$
- $f(x) = -\frac{1}{2}|x|$ ,  $\vec{u} = [0, -8]$ .

**1.62.** W prostokątnym układzie współrzędnych naskicuj wykres funkcji  $g$ , opisanej wzorem  $g(x) = \frac{1}{x} + 2$ . Następnie podaj:

- miejsce zerowe funkcji  $g$ ,
- zbiór wartości funkcji  $g$ ,
- przedziały monotoniczności funkcji  $g$ .

**1.63.** W prostokątnym układzie współrzędnych naskicuj wykres funkcji  $g$ , opisanej wzorem  $g(x) = x^2 - 1$ . Odczytaj z wykresu:

- miejsce zerowe funkcji  $g$ ,
- zbiór wartości funkcji  $g$ ,
- maksymalny przedział, w którym funkcja  $g$  jest malejąca.

**1.64.** W prostokątnym układzie współrzędnych naskicuj wykres funkcji  $g$ , opisanej wzorem  $g(x) = \sqrt{x} + 3$ . Odczytaj z wykresu:

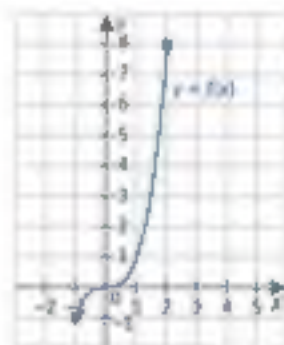
- argument, dla którego wartość funkcji  $g$  wynosi 5,
- wartość funkcji  $g$  dla argumentu 9,
- zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja  $g$  przyjmuje dla argumentów z przedziału  $(0, 4)$ .

**1.65.** Funkcję  $f$  określa wzór  $f(x) = |x|$ , gdzie  $x \in (-5, 4)$ . Wykres funkcji  $g$  powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u} = [0, -4]$ .

- Podaj wzór funkcji  $g$ .
- Naskicuj wykresy funkcji  $f$  i  $g$  w jednym układzie współrzędnych.
- Podaj najmniejszą wartość funkcji  $f$  oraz najmniejszą wartość funkcji  $g$ .

**1.66.** Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji  $f(x) = x^3$ , gdzie  $x \in (-1, 2)$ . Funkcję  $g$  określa wzór  $g(x) = f(x) - 1$ .

- Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ .
- Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji  $g$  z osią  $OY$ .



**1.67.** Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział liczbowy  $(-4, 6)$ . Wyznacz zbiór wartości funkcji  $g$ , określonej wzorem:

- $g(x) = f(x) - 12$
- $g(x) = f(x) + 30$
- $g(x) = f(x) - 212$
- $g(x) = f(x) + 2345$

**1.68.** Punkty  $(-3, 1)$ ,  $(2, -4)$  należą do wykresu funkcji  $f$ . Podaj dwa punkty, które należą do wykresu funkcji, określonej wzorem:

- $g(x) = f(x) - 6$
- $h(x) = f(x) + 21$
- $k(x) = f(x) - 7 + x$

**1.69.** Dany jest wzór funkcji  $f$  i współrzędne wektora  $\vec{u}$ . Wyznacz wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymamy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ .

- $f(x) = x^2 + 1$ ,  $\vec{u} = [0, -5]$
- $f(x) = 2x - 1$ ,  $\vec{u} = [0, 1]$
- $f(x) = (x + 1)^2$ ,  $\vec{u} = [0, 2]$

**1.70.** Wykres funkcji liniowej  $f(x) = 2x$  przesunięto równoległe wzdłuż osi  $OX$  o wektor  $\vec{u} = [-3, 0]$  i otrzymano wykres funkcji  $g$ .

- O jaki wektor  $\vec{v}$  można przesunąć równoległe wykres funkcji  $f$  wzdłuż osi  $OY$ , aby otrzymać wykres funkcji  $g$ ? Przeprowadź odpowiednie obliczenia. Następnie naskicuj wykresy funkcji  $f$  i  $g$  w jednym układzie współrzędnych i zaznacz wektory przesunięcia.
- Czy przesuwając równoległe wykres funkcji  $f(x) = x^2$  raz o wektor  $\vec{u} = [-3, 0]$  i drugi raz o wektor  $\vec{v}$  otrzymamy wykres tej samej funkcji?

**1.71.** Wykres funkcji liniowej  $f(x) = \frac{-x}{2}$  przesunięto równoległe wzdłuż osi  $OY$  o wektor  $\vec{u} = [0, -2]$  i otrzymano wykres funkcji  $g$ . O jaki wektor  $\vec{v}$  można przesunąć równoległe wykres funkcji  $f$  wzdłuż osi  $OX$ , aby otrzymać wykres funkcji  $g$ ? Przeprowadź odpowiednie obliczenia. Następnie naskicuj wykresy funkcji  $f$  i  $g$  w jednym układzie współrzędnych i zaznacz wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ , zaczepione w punkcie  $O(0, 0)$ .

**1.72.** Funkcja  $f$  jest opisana za pomocą tabelki:

$x$	-4	-3	0	5	12	40	100
$f(x)$	-10	-8	-5	1	2	25	400

Opisz za pomocą tabelki funkcję  $g$  określoną wzorem:

- $g(x) = f(x - 1) + 5$
- $g(x) = f(x + 3) + 12$
- $g(x) = f(x - 15) - 100$
- $g(x) = f(x + 100) - 256$

**1.73.** Podaj współrzędne wektora  $u$ , o jak należy przesunąć wykres funkcji  $f$  aby otrzymać wykres funkcji  $g$ , jeśli:

- a)  $g(x) = f(x-2) + 4$     b)  $g(x) = f(x+1) + 5$     c)  $g(x) = f(x+5) - 3$   
 d)  $g(x) = f(x-7) - 2$     e)  $g(x) = f(x-\sqrt{3}) + 10$     f)  $g(x) = f(x+4) - \sqrt{2}$

**1.74.** Wykres funkcji  $f$  przesun równolegle o wektor  $u$ . Napisz wzór funkcji  $g$ , które, wykres otrzymałeś, jeśli:

- a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $\vec{u} = [1, 2]$     b)  $f(x) = x^4$ ,  $\vec{u} = [-2, 3]$   
 c)  $f(x) = |x|$ ,  $\vec{u} = [4, -5]$     d)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\vec{u} = [1, 3]$

**1.75.** Podaj współrzędne wektora  $u$ , o jak należy przesunąć wykres funkcji  $f$  aby otrzymać wykres funkcji  $g$ , jeśli:

- a)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = |x-1| + 3$   
 b)  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (x+20)^3 - 4$   
 c)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = (x+3)^2 - 1$   
 d)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 4$   
 e)  $f(x) = 3\sqrt{x}$ ,  $g(x) = 3\sqrt{x+2} + 6$   
 f)  $f(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = \frac{4}{x-5} - 7$

**1.76.** Narysuj wykres funkcji:

- a)  $y = (x-2) - 4$     b)  $y = x + 3 - 1$     c)  $y = \sqrt{x+1} - 2$   
 d)  $y = \frac{1}{x-2} - 1$     e)  $y = (x+1) - 1$     f)  $y = \frac{x^4}{2} + 3$

**1.77.** Na rysunku obok dany jest wykres funkcji  $f$ . Funkcją  $g$  określa wzór  $g(x) = f(x+2) + 5$ . Wymień:

- a) przedziały monotoniczności funkcji  $g$   
 b) wartość największą i wartość najmniejszą funkcji  $g$  oraz dla jakich argumentów są one przyjmowane  
 c) wartość wyrażenia:  
 $g(-6) - g(-2) + g(0) - g(3)$



**1.78.** Dana jest dziedzina i zbiór wartości funkcji  $f$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ , jeśli:

- a)  $D_f = \{-2, 3\}$ ,  $ZW_f = \{4, 5\}$ ,  $g(x) = f(x-5) - 2$   
 b)  $D_f = [-2, 8]$ ,  $ZW_f = [1, 9]$ ,  $g(x) = f(x-7) - 10$   
 c)  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $ZW_f = [2, +\infty)$ ,  $g(x) = f(x+6) - 5$   
 d)  $D_f = (-3, 1)$ ,  $ZW_f = \{-\infty, 6\}$ ,  $g(x) = f(x-3) + 4$

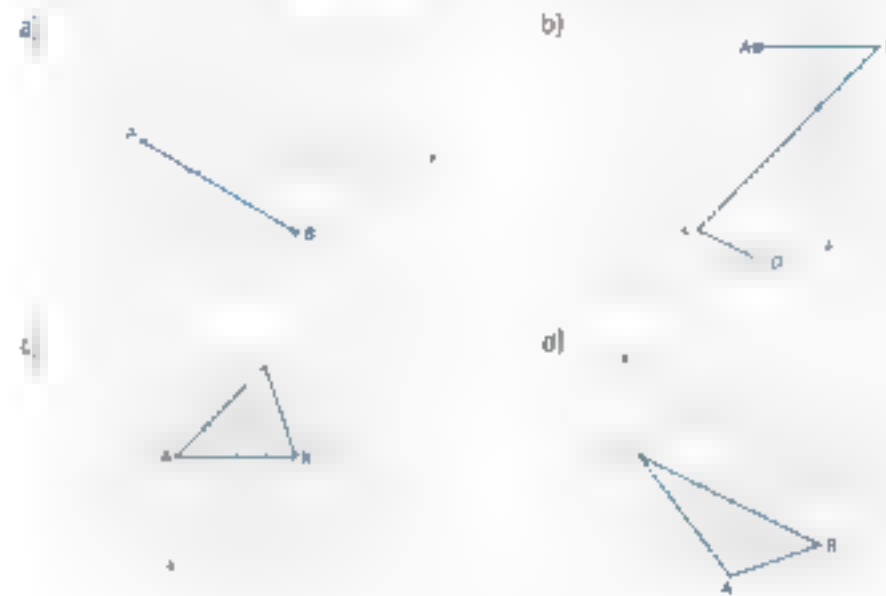
**1.79.** Podaj wzór funkcji  $g$ , które, wykres otrzymamy przesuwając równolegle wykres funkcji  $f$  o wektor  $u$ , jeśli:

- a)  $f(x) = x$ ,  $x \in [3, 6]$ ,  $u = [4, 5]$     b)  $f(x) = \frac{x}{2}$ ,  $u = [1, 1]$   
 c)  $f(x) = -3x + 5$ ,  $u = [1, 2]$     d)  $f(x) = 2(x+1)(x-1)$ ,  $\vec{u} = [-2, 7]$

## Symetria osiowa.

### Symetria osiowa względem osi OX i OY

**1.80.** Znajdź obrazy danych figur w symetrii osiowej względem prostej  $k$ :



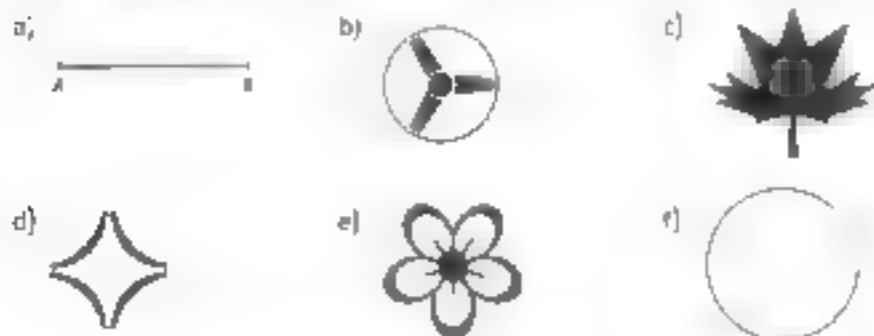


**1.81** Zapoznaj się z poniższą definicją, a następnie wykonaj ćwiczenia.

„Prostą  $k$  nazywamy **osią symetrii** figury  $F$  wtedy, gdy obrazem figury  $F$  w symetrii względem prostej  $k$  jest to sama figura  $F$ , czyli  $S_k(F) = F$ .”

Figury, które mają osi symetrii nazywamy figurami **osiowoosymetrycznymi**.”

1) Poniżej, przedstawione są figury osiowoosymetryczne. Ile osi symetrii ma każda z nich?



- 2) Podaj przykład figury, która ma sześć osi symetrii.  
 3) Podaj przykład figury, która nie jest osiowoosymetryczna.  
 4) Ile osi symetrii ma trójkąt:  
 - równoboczny,  
 - równoramienny, który nie jest równoboczny,  
 - równoboczny.

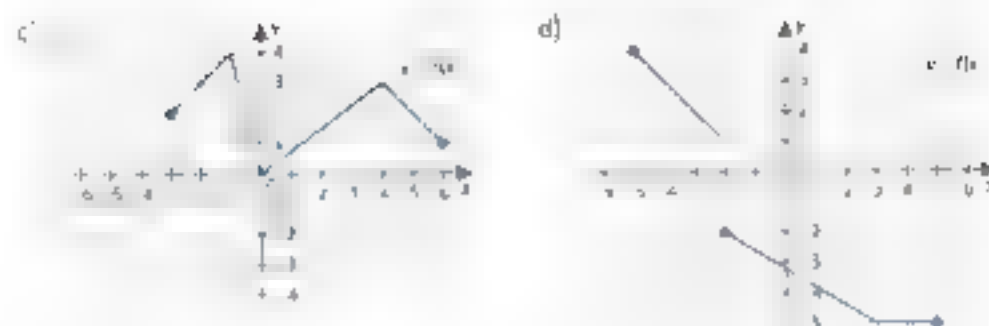
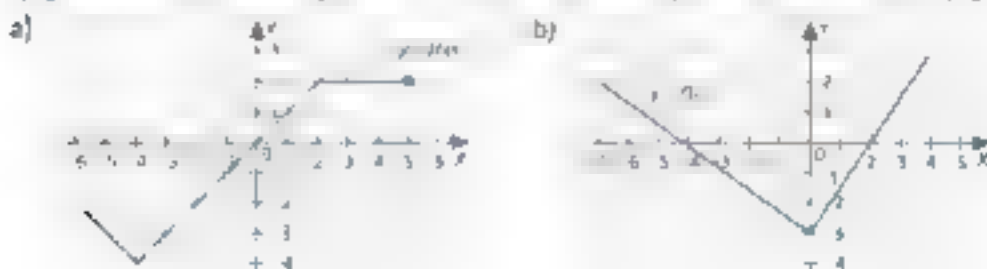
**1.82.** Funkcja  $f$  jest opisana za pomocą tabelki.

$x$	-42	30	6	15	17	2012
$f(x)$	-34	-12	15	6	90	143

$x$	-23	15	35	64	198	200
$y$	17	0	6	15	96	4

Przedstaw za pomocą tabelki funkcję  $g$ , jeśli  $g(x) = -f(x)$ .

**1.83** Na rysunkach jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Narysuj wykres funkcji  $g$  określonej wzorem  $g(x) = -f(x)$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ .



**1.84.** Napisz wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymamy po przekształceniu wykresu funkcji  $f$  przez symetrię osiową względem osi  $OX$ .

- a)  $f(x) = 3x - 2$       b)  $f(x) = -5x + 8$       c)  $f(x) = x - 8$   
 d)  $f(x) = 1 - x$       e)  $f(x) = x - 15$       f)  $f(x) = \sqrt{x} + 7$

**1.85.** Dana jest funkcja  $f$ . Napisz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji  $f$  względem osi  $OX$ . Narysuj wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

- a)  $f(x) = 4$       b)  $f(x) = x - 3$       c)  $f(x) = x^2$   
 d)  $f(x) = x^3$       e)  $f(x) = \sqrt{x+2}$       f)  $f(x) = x^2 - 1$

**1.86.** Dana jest dziedzina i zbiór wartości funkcji  $f$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ , określonej wzorem  $g(x) = -f(x)$ .

- a)  $D = [-4, 3]$ ,  $ZW = [-1, 5]$       b)  $D = \mathbb{R}$ ,  $ZW = [4, +\infty)$

**1.87.** Funkcja  $f$  jest opisana za pomocą tabelki.

$x$	-10	-6	4	3	1	2	7
$f(x)$	5	4	1	0	2	5	13

$x$	46	24	0	1	17	28	67
$f(x)$	-5	46	-7	-23	-22	11	13

Przedstaw za pomocą tabelki funkcję określoną wzorem  $g(x) = -f(x)$ .

1.88. Na podstawie wykresu funkcji  $f$  narysuj wykres funkcji  $g$  określonej wzorem  $g(x) = f(-x)$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ .



1.89. Dany jest wzór funkcji  $f$ . Napisz wzór funkcji  $h$ , której wykres jest symetryczny względem osi  $OY$  do wykresu funkcji  $f$ . Podaj dziedzinę funkcji  $h$ . Narysuj wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych, jeśli:

- a)  $f(x) = x + 2$ , gdzie  $x \in (-4, 2)$       b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , gdzie  $x \in (-\infty, 0)$   
 c)  $f(x) = -2$ , gdzie  $x \in (-5, 1)$       d)  $f(x) = x^2 - 2$ , gdzie  $x \in (-1, 2)$   
 e)  $f(x) = \sqrt{x}$ , gdzie  $x \in (0, 4)$       f)  $f(x) = (x+1)^2$ , gdzie  $x \in (-3, 1)$ .

1.90. Wykres funkcji  $g$  powstał w wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $f$  przez symetrię osiową względem osi  $OY$ . Napisz wzór funkcji  $g$  i podaj jej dziedzinę, jeśli:

- a)  $f(x) = 5x - 4$       b)  $f(x) = \sqrt{x} + 2$       c)  $f(x) = |x + 3|$   
 d)  $f(x) = \frac{1}{x - 6}$       e)  $f(x) = \sqrt{x - 4}$       f)  $f(x) = \frac{2x}{1 - x}$

1.91. Dany jest zbiór dziedzin i zbiór wartości funkcji  $f$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ , określonej wzorem  $g(x) = f(-x)$ .

- a)  $D_f = \{-4, 3\}$ ,  $ZW_f = \{1, 5\}$       b)  $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ ,  $ZW_f = (-4, +\infty)$

1.92. Narysuj wykres funkcji:

- a)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$       b)  $f(x) = (x-1)^2 + 1$       c)  $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)$   
 d)  $f(x) = -\sqrt{x+4}$       e)  $f(x) = \sqrt{x+4}$       f)  $f(x) = (-x+2)^2$

1.93. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Dla każdej z funkcji  $g(x) = f(-x)$  oraz  $h(x) = f(x)$ , podaj:

- a) zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartość ujemną  
 b) maksymalne przedziały, w których ta funkcja jest rosnąca  
 c) największą wartość tej funkcji  
 d) współrzędne punktu przecięcia wykresu tej funkcji z osią  $OY$



1.94. Funkcja  $f$  ma trzy miejsca zerowe:  $-5$ ,  $1$  i  $5$  oraz wiadomo, że  $f(0) = 4$  i  $f(3) = -2$ . Podaj miejsca zerowe funkcji  $g$  i współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji  $g$  z osią  $OY$ , jeśli:

- a)  $g(x) = f(-x)$       b)  $g(x) = -f(x)$       c)  $g(x) = f(x - 3)$

1.95. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $f(x) = (x-2)^2$  przez symetrię względem:

- a) osi  $OX$       b) osi  $OY$

1.96. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $f(x) = \frac{3-x}{2x}$  przez symetrię względem:

- a) osi  $OX$       b) osi  $OY$

## Symetria środkowa.

Symetria środkowa względem punktu  $(0, 0)$ 1 97. Znajdź obraz danej figury w symetrii środkowej względem punktu  $O$  (jeśli).

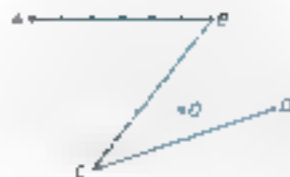
a)



b)



c)



d)



1 98. Zapoznaj się z poniższą definicją, a następnie wykonaj ćwiczenia.

Punkt  $O$  nazywamy **środkiem symetrii** figury  $F$  wtedy, gdy obrazem figury  $F$  w symetrii środkowej względem punktu  $O$  jest ta sama figura, czyli  $S_O F = F$ .  
 Figury, które mają środek symetrii nazywamy **figurami środkowosymetrycznymi**.

1) Wśród poniższych figur znajdują się figury środkowosymetryczne. Wskaż je.

a)



b)



c)



d)



- 2) Podaj przykład figury geometrycznej, która ma jeden środek symetrii, i figury geometrycznej, która ma nieskończenie wiele środków symetrii.  
 3) Narysuj dwie figury, które mają jednocześnie oś symetrii i środek symetrii.

1 99. Funkcja  $f$  jest opisana za pomocą tabelki.

a)

$x$	4	3	0	8	1	30	45
$f(x)$	-20	-8	-6	2	5	31	80

b)

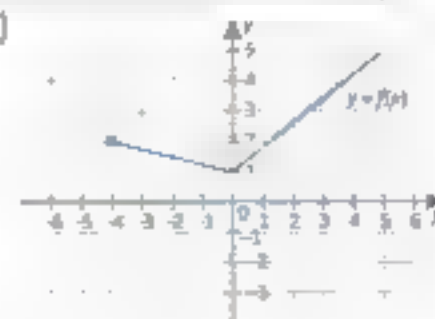
$x$	7	10	26	101	170
$f(x)$	-2	-11	-90	27	24

Opisz funkcję  $g$  za pomocą tabelki, jeśli  $g(x) = -f(-x)$ .1 100. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Narysuj wykres funkcji  $g$  określonej wzorem  $g(x) = f(-x)$ . Podaj dziedzinę zbioru wartości funkcji  $g$ .

a)



b)



c)



d)

1 101. Wykres funkcji  $g$  jest symetryczny do wykresu funkcji  $f$  względem punktu  $(0, 0)$ . Narysuj wykresy funkcji  $f$  oraz  $g$  w wspólnym układzie współrzędnych. Napisz wzór funkcji  $g$  podając jej dziedzinę, jeśli:

a)  $f(x) = x + 4$ , gdzie  $x \in (-3, 0)$

b)  $f(x) = \sqrt{x}$ , gdzie  $x \in (0, 4)$

c)  $f(x) = x^2$ , gdzie  $x \in (-1, 3)$

d)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , gdzie  $x \in [-1, 4]$

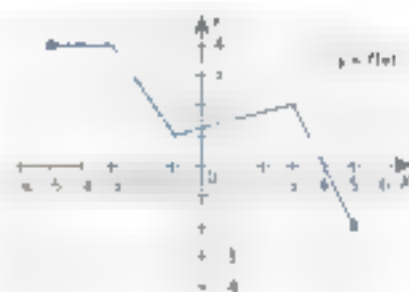
e)  $f(x) = -1$ , gdzie  $x \in (-5, 6)$

f)  $f(x) = x$ , gdzie  $x \in [-4, 2]$



1.102. Na rysunku obok jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ . Funkcję  $g$  określa wzór  $g(x) = -f(-x)$ . Podaj:

- zbiór wartości funkcji  $g$
- miejsc zerowe funkcji  $g$
- wartość wyrażenia  $g(-3) \cdot g(3) \cdot g(4)$
- maksymalne przedziały, w których funkcja  $g$  jest malejąca.



1.103. Dany jest dziedzinę – zbiór wartości funkcji  $f$ . Podaj dziedzinę – zbiór wartości funkcji  $g$ , określonej wzorem  $g(x) = -f(-x)$ .

- $D_f = [-3; 7]$ ,  $ZW_f = \{0; 4\}$
- $D_f = [-1; 5]$ ,  $ZW_f = \{6; 2\}$
- $D_f = [-\infty; 9]$ ,  $ZW_f = \{8\}$
- $D_f = [-4; 2]$ ,  $ZW_f = \{1; -\infty\}$

1.104. Dany jest wzór funkcji  $f$ . Napisz wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymamy po przekształceniu wykresu funkcji  $f$  przez symetrię środkową względem punktu  $O(0; 0)$ . Oblicz miejsca zerowe – współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji  $g$  z osią  $OY$  (o ile istnieją).

- $f(x) = 4x - 7$
- $f(x) = 3$
- $f(x) = x^2 - 1$
- $f(x) = x + 8$
- $f(x) = \sqrt{x} - 1$
- $f(x) = 3(x - 2)(x + 1)$

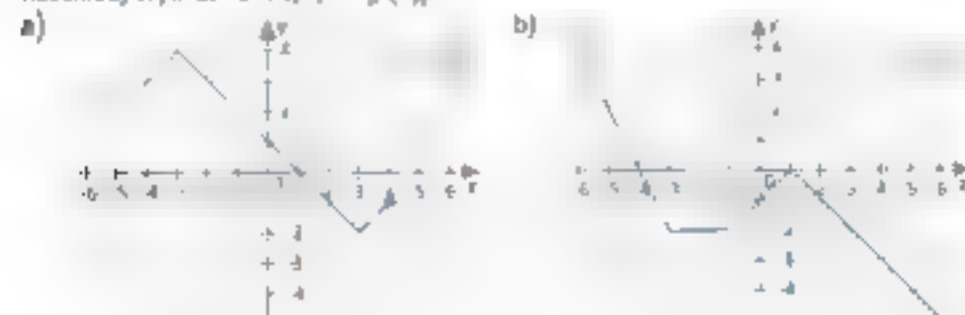
## Wykres funkcji $y = |f(x)|$ oraz $y = f(|x|)$

1.105. Funkcja  $f$  opisana jest tabelką w następujący sposób

$x$	3	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
$f(x)$	-5	-7	-2	-4	1	2	3	4	5

Sporządź tabelkę opisującą funkcję  $y = |f(x)|$ .

1.106. Na podstawie wykresu funkcji  $f$  przedstawionego na poniższym rysunku, narysuj wykres funkcji  $y = f(|x|)$ .



1.107. Dany jest wzór funkcji  $f$ . Narysuj wykres funkcji  $y = f(x)$ .

- $f(x) = x - 3$
- $f(x) = 2x + 4$
- $f(x) = \frac{x}{2} - 1$
- $f(x) = x - 2$

1.108. Narysuj wykres funkcji  $g$ .

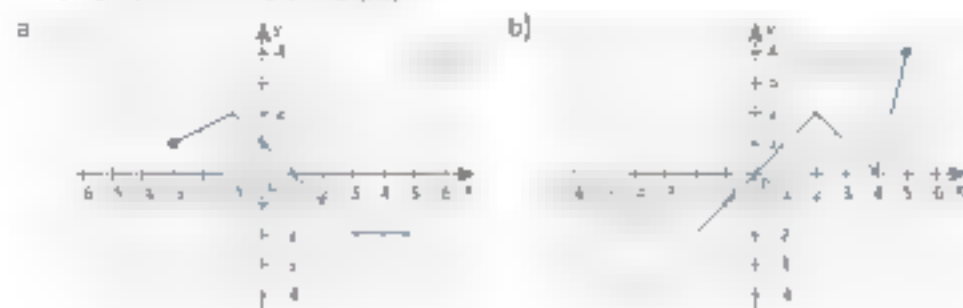
- $g(x) = |x^2 - 4|$
- $g(x) = |(x + 2)^2|$
- $g(x) = \left| \frac{1}{x+3} \right|$
- $g(x) = \left| \frac{1}{x} + 1 \right|$

1.109. Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą tabelki. Sporządź tabelkę opisującą funkcję  $y = f(|x|)$ .

$x$	13	9	5	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	4	2	1	3	8	25	30	12	6	12	6	30	25

$x$	-4	-2	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	6	4	0	-2	4	-6	-4	-10	-2

1.110. Na podstawie wykresu funkcji  $f$  przedstawionego na poniższym rysunku, narysuj wykres funkcji  $y = f(|x|)$ .



1.111. Dany jest wzór funkcji  $f$ . Narysuj wykres funkcji  $y = f(|x|)$ .

- $f(x) = (x + 1)^2$
- $f(x) = |x - 2|$
- $f(x) = x - 1$
- $f(x) = (x - 1)^2$

1.112. Narysuj wykres funkcji  $g$ .

- $g(x) = \sqrt{|x| - 1}$
- $g(x) = \sqrt{|x| + 4}$
- $g(x) = \frac{1}{|x| + 1}$
- $g(x) = \frac{1}{x - 2}$

**1.113.** Funkcje  $f$  i  $g$  są określone w zbiorze liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Podaj zbiór wszystkich argumentów dla których wykresy tych funkcji się pokrywają, jeśli:

a)  $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = 2x - 3$       b)  $f(x) = x - 9$ ,  $g(x) = |x - 9|$ .

**1.114.** Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = |x| + 3$

- a) korzystając z wykresu funkcji  $y = x + 3$   
b) korzystając z wykresu funkcji  $y = |x|$ .

**1.115.** Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = |x - 4|$

- a) korzystając z wykresu funkcji  $y = x - 4$   
b) korzystając z wykresu funkcji  $y = |x - 4|$ .

**1.116.** Zbiorem wartości funkcji  $y = f(x)$  jest podany zbiór  $ZW$ . Wyznacz zbiór wartości funkcji  $y = f(|x|)$ , jeśli:

- a)  $ZW = (0, 5)$       b)  $ZW = (-9, 3)$   
c)  $ZW = [-10, -1) \cup (2, 9)$       d)  $ZW = (-3, -1) \cup (2, 15)$

**1.117.** Dziedziną funkcji  $y = f(x)$  jest podany zbiór  $D$ . Wyznacz dziedzinę funkcji  $y = f(|x|)$ , jeśli:

- a)  $D = (-3, 4)$       b)  $D = (0, 7)$   
c)  $D = (-8, -3) \cup (2, 5)$       d)  $D = [-3, 1] \cup [7, \infty)$

**1.118.** O funkcji  $y = f(x)$  wiadomo, że ma trzy miejsca zerowe  $-7, 2, 28$ . Podaj miejsca zerowe funkcji:

- a)  $y = f(x)$       b)  $y = f(x)$

**1.119.** Wykres funkcji  $y = f(x)$  ma z osi  $OY$  punkt wspólny  $P(0, \sqrt{3})$ . Podaj współrzędne punktu wspólnego osi  $OY$  z wykresem funkcji:

- a)  $y = f(x)$       b)  $y = f(x)$

**1.120.** Wykres funkcji  $f$  przecina oś układu współrzędnych w punktach  $(0, -8)$ ,  $(3, 0)$  i  $(4, 0)$  i  $(9, 0)$ . Podaj współrzędne punktów przecięcia osi układu współrzędnych z wykresem funkcji:

- a)  $f(x)$       b)  $f(|x|)$ .

**Wykres funkcji  $y = k f(x)$  oraz  $y = f(kx)$ , gdzie  $k \neq 0$**

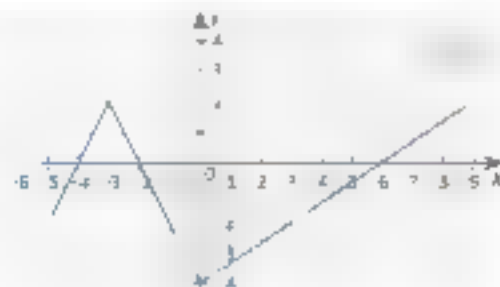
**1.121.** Narysuj w układzie współrzędnych trójkąt  $ABC$  gdzie  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $C(6, 3)$ . Wyznacz obraz  $A_1B_1C_1$  tego trójkąta w powinowactwie prostokątnym o osi  $OX$  skali  $k$ , jeśli:

- a)  $k = 3$       b)  $k = \frac{1}{3}$       c)  $k = -\frac{2}{3}$

**1.122.** Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą tabeli. Sporządź tabelę opisującą funkcję  $y = f(x)$ .

$x$	11	8	5	2	-4	7
$y = f(x)$	2	3	4	5	6	7

**1.123.** Dany jest wykres funkcji  $f$  (zobacz rysunek poniżej)



Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji:

- a)  $y = 0.25f(x)$       b)  $y = \frac{1}{2}f(x)$       c)  $y = 2f(x)$       d)  $y = 0.75f(x)$

**1.124.** Na podstawie wykresu funkcji  $f$  naszkicuj wykres funkcji  $g$ , jeśli:

- a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 3f(x)$       b)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = -2f(x)$   
c)  $f(x) = x - 6$ ,  $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$       d)  $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

**1.125.** Na rysu, w układzie współrzędnych trójkąt  $ABC$  gdzie  $A(-4, 0)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(3, 2)$ . Wyznacz obraz tego trójkąta w powinowactwie prostokątnym o osi  $OY$  i skali  $k$ , jeśli:

- a)  $k = 2$       b)  $k = -3$       c)  $k = -\frac{5}{2}$

1.126. Funkcja  $f$  jest opisana za pomocą tabelki:

$x$	15	12	0	-48	60
$y = f(x)$	2	5	1	3	7

Sporządź tabelę, opisującą funkcję:

a)  $y = f(3x)$       b)  $y = f(-4x)$       c)  $y = f\left(\frac{2}{5}x\right)$       d)  $y = f\left(\frac{1}{4}x\right)$

1.127. Dany jest wzór funkcji  $f$ . Wyznacz dziedzinę funkcji  $g$  i narysuj jej wykres w układzie współrzędnych, jeśli:

a)  $f(x) = x^2 - 3, 2$      $g(x) = f(2x)$     b)  $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 2]$      $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

c)  $f(x) = \frac{1}{3}x + 2, x \in [-3, 6], g(x) = f(-3x)$

d)  $f(x) = x^2 - 2, x \in [-2, 2]$      $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

1.128. Na podstawie wykresu funkcji  $f$  narysuj wykres funkcji  $g$ , jeśli:

a)  $f(x) = \sqrt{x+1}, x \in (-1, 8); g(x) = f(2x)$

b)  $f(x) = x^2 - 2, x \in (-1, 2); g(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$

c)  $f(x) = x - 1, x \in [-2, 1]; g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

d)  $f(x) = \frac{1}{x-2}, x \in (2, 4); g(x) = 2f(x)$

Napisz wzór funkcji  $g$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ .

1.129. Na podstawie wykresu funkcji  $f(x) = (x-1)^2$  gdzie  $x \in [-1, 3]$  narysuj

wykres funkcji  $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ . Następnie wyznacz:

- wzór i dziedzinę funkcji  $g$ ,
- przedział, w którym funkcja  $g$  jest malejąca

1.130. Na podstawie wykresu funkcji  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 1$  gdzie  $x \in (5, 3) \cup (3, 1)$

narysuj wykres funkcji  $g(x) = -2f(x)$ . Następnie wyznacz:

- wzór i dziedzinę funkcji  $g$ ,
- zbiór wartości funkcji  $g$ .

1.131. Podaj, w jaki sposób należy przekształcić wykres funkcji:

a)  $f(x) = \sqrt{x+1}$       b)  $g(x) = \sqrt{x-4}$       c)  $h(x) = 2\sqrt{x}$

aby otrzymać wykres funkcji  $y = \sqrt{4x+4}$

1.132. Podaj, w jaki sposób należy przekształcić wykres funkcji:

a)  $f(x) = -|x| + 6$       b)  $g(x) = |x| - 3$       c)  $h(x) = -2x + 6$

aby otrzymać wykres funkcji  $y = -3|x| + 6$ .

1.133. Dziedziną funkcji  $f$  jest przedział  $[-4, 12]$ , a jej miejscami zerowymi są tylko dwie liczby: 3 oraz 4. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji  $g$  określonej wzorem

$$g(x) = f\left(\frac{1}{8}x\right)$$

1.134. Dziedziną funkcji  $f$  jest przedział  $[-8, 5]$ , a jej zbiorem wartości przedział  $[-2, 10]$ . Wykres funkcji  $f$  przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, 6)$ . Funkcja  $g$  jest opisana

wzorem  $g(x) = \frac{2}{3}f(x)$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$  oraz współrzędne

punktu wspólnego wykresu funkcji  $g$  i osi  $OY$ .

1.135. O funkcji  $f$  wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór  $[-6, 2]$ , zaś zbiorem wartości przedział  $[-9, 4]$ . Ponadto funkcja  $f$  ma tylko trzy miejsca zerowe:  $-4, 0, 1$ . Podaj dziedzinę, zbiór wartości i miejsca zerowe funkcji  $g$  określonej wzorem  $g(x) = f(6x)$ .

1.136. O funkcji  $f$  wiadomo, że jej dziedziną jest zbiór  $[-5, 10]$ , zbiorem wartości przedział  $[-1, 20]$  i że jej wykres przecina oś  $OY$  w punkcie o współrzędnych  $(0, 2)$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$  określonej wzorem  $g(x) = 4f(x)$ . Jakie współrzędne ma punkt wspólny wykresu funkcji  $g$  i osi  $OY$ ?

## Szkicowanie wykresów wybranych funkcji

1.137. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz z wykresu funkcji  $f(x) = x^2$  stosując następujące przekształcenia:

- przesunięcie równoległe o wektor  $\vec{u} = [3, 1]$ , następnie symetria osiowa otrzymanego wykresu względem osi  $OX$
- symetria osiowa względem osi  $OY$ , następnie przesunięcie równoległe otrzymanego wykresu o wektor  $\vec{v} = [3, 1]$



**1.138** Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz stosując następujące przekształcenia wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$

- a) przesunięcie równoległe o wektor  $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$  następnie symetria osiowa otrzymanego wykresu względem osi  $OY$   
 b) symetria osiowa względem osi  $OY$  następnie przesunięcie równoległe otrzymanego wykresu o wektor  $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

**1.139** Jeśli chcemy naszkicować wykres funkcji  $h(x) = 2 - x - 1$  to możemy zastosować następującą kolejność przekształceń:

$$f(x) = |x| \xrightarrow{T_1} g_1(x) = |x+2| - 1 \xrightarrow{S_1}$$

$$h_1(x) = -x + 2 - 1 \xrightarrow{S_2} h(x) = 2 - x - 1$$

Czy otrzymamy wykres funkcji  $y = h(x)$ , jeśli:

- a) wykres funkcji  $f(x) = |x|$  przesuniemy równoległe o wektor  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , a następnie otrzymany wykres przekształcimy przez symetrię środkową względem punktu  $O(0, 0)$   
 b) wykres funkcji  $f(x) = x$  przekształcimy przez symetrię środkową względem punktu  $O(0, 0)$ , a następnie otrzymany wykres przesuniemy o wektor  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

**1.140** Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = (x - 5)^2 - 8$ , korzystając z następującej kolejności przekształceń:

$$f(x) = x \xrightarrow{T_1} g_1(x) = x - 5 \xrightarrow{y} g_2(x) = (x - 5)^2 - 8$$

$$g_2(x) = (x - 5)^2 - 8 \xrightarrow{y} g(x) = (x - 5)^2 - 8$$

Czy otrzymamy wykres funkcji  $g(x) = (x - 5)^2 - 8$ , jeśli najpierw naszkicujemy wykres funkcji  $y = x$ , a następnie otrzymany wykres przesuniemy równoległe o wektor  $\vec{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \end{bmatrix}$ ?

**1.141.** Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ .

- a) Naszkicuj wykres funkcji  $h(x) = f(x)$ . Wykres funkcji  $h$  przesunij równoległe o wektor  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ . Podaj wzór otrzymanej funkcji.  
 b) Czy otrzymamy wykres tej samej funkcji, co w punkcie a), jeśli wykres funkcji  $y = \frac{1}{x}$  przesuniemy równoległe o wektor  $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ?

**1.142** Aby naszkicować wykres funkcji  $h(x) = f(x - 5)$ , możemy ustalić następującą kolejność przekształceń:

$$y = f(x) \xrightarrow{y} f(x) \xrightarrow{T_1} h_1(x) = f(x - 5) \xrightarrow{T_2} h(x) = f(x - 5)$$

Czy otrzymamy wykres funkcji  $y = h(x)$ , jeśli zmienimy kolejność powyższych przekształceń? Odpowiedź uzasadnij.

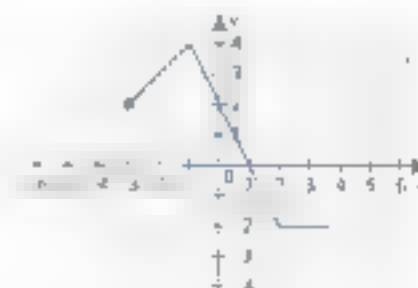
**1.143** Aby naszkicować wykres funkcji  $h(x) = f(1 - x)$ , możemy ustalić następującą kolejność przekształceń:

$$y = f(x) \xrightarrow{S_1} h_1(x) = f(1 - x) \xrightarrow{T_1} h_2(x) = f(1 - x) \xrightarrow{y} h(x) = f(1 - x)$$

Czy ostatecznym efektem będzie wykres funkcji  $y = h(x)$ , jeśli na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  naszkicujemy wykres funkcji  $y = f(x)$  otrzymany wykres przekształcimy przez symetrię osiową względem osi  $OY$ , a następnie otrzymany wykres przesuniemy równoległe o wektor  $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ? Odpowiedź uzasadnij.

**1.144.** Na rysunku obok dany jest wykres funkcji  $f$ . Wykonując odpowiednie przekształcenia, naszkicuj wykres:

- a)  $y = -f(x - 3)$   
 b)  $y = f(4 - x)$   
 c)  $y = \frac{1}{2}f(-x - 2)$   
 d)  $y = 2f(1 - x)$



**1.145.** Na rysunku obok dany jest wykres funkcji  $f$ . Wykonując odpowiednie przekształcenia, naszkicuj wykres:

- a)  $y = -f(x) + 1$   
 b)  $y = |f(-x) + 2|$   
 c)  $y = -|f(x)| + 3$   
 d)  $y = f(2 - x) - 1$



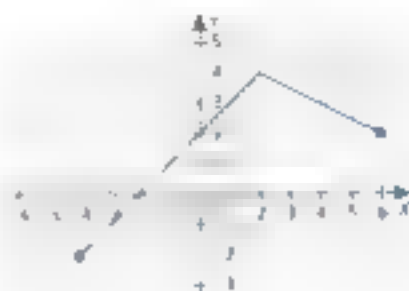
**1.146.** Na rysunku obok dany jest wykres funkcji  $f$ . Wykonując odpowiednie przekształcenia, narysuj wykres:

a)  $y = -\frac{1}{4}f(|x|)$

b)  $y = f(x-2)$

c)  $y = \frac{1}{2}f(x+2)$

d)  $y = 2 - f(|-3+x|)$



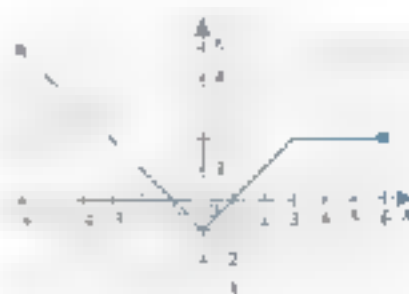
**1.147.** Na rysunku obok dany jest wykres funkcji  $f$ . Wykonując odpowiednie przekształcenia, narysuj wykres

a)  $y = f(x-3) - 4$

b)  $y = \frac{1}{2}f(2x) - 3$

c)  $y = 3 - f(2-x)$

d)  $y = 4 - f(-x+2)$



**1.148.** Narysuj wykres funkcji  $f$  jeśli

a)  $f(x) = \sqrt{2-x} - 3$

b)  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

c)  $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$

d)  $f(x) = \sqrt{|x|} - 1$

**1.149.** Narysuj wykres funkcji  $f$  jeśli

a)  $f(x) = x - 3, x \in [1, 4]$

b)  $f(x) = x - 2, x \in [2, 3]$

c)  $f(x) = \sqrt{x-4}, x \in [4, 5]$

d)  $f(x) = x - 1, x \in [2, 4]$

**1.150.** Narysuj wykres funkcji

a)  $f(x) = x - 1, x \in [2, 4]$

b)  $f(x) = x - 1, x \in [2, 4]$

c)  $f(x) = 12 - x$

d)  $f(x) = \frac{x}{2} - 3$

**1.151.** Narysuj wykres funkcji

a)  $f(x) = \frac{2}{x-2}$

b)  $f(x) = \frac{1}{x-3} - 2$

c)  $f(x) = \frac{3}{|x|-1}$

d)  $f(x) = \left| 2 - \frac{1}{x-1} \right|$

**1.152.** Narysuj wykres funkcji

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 3, x \in [1, 4]$

b)  $f(x) = 2x + 1, x \in [2, 3]$

c)  $f(x) = -\frac{1}{2}|x-1| - 2$

d)  $f(x) = x - 1, x \in [2, 3]$

**1.153.** Narysuj wykres funkcji  $f$  jeśli

a)  $f(x) = 2 - |x|^2 - 1$

b)  $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{jeśli } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} + 1, & \text{jeśli } x \leq 1 \\ \frac{1}{4}(x-3)^2 + 1, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{jeśli } x \in (-2, 2) \\ \frac{1}{2}x, & \text{jeśli } x \in (-2, 2) \end{cases}$

## Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności

**1.154.** Odczytaj z wykresu funkcji  $f(x) = (x-2)^2$  argumenty dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość 1. Następnie rozwiąż algebraicznie równanie  $(x-2)^2 = 1$ .

**1.155.** Odczytaj z wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$  argument, dla którego funkcja  $f$  przyjmuje wartość 2. Następnie rozwiąż algebraicznie równanie  $\sqrt{x} = 2$ .

**1.156.** Narysuj wykres funkcji  $f(x) = x - 2, x \in [2, 3]$ . Następnie podaj zbiór rozwiązań równania  $f(x) = 2$ .

**1 157** Korzystając z wykresu odpowiednich funkcji rozwiąż równanie

a)  $x = x$       b)  $\frac{1}{x-5} = 1$       c)  $(x+2)^2 = 8$

**1 158.** Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż równanie

a)  $x^2 = 2$       b)  $(x-3)^2 = x-1$       c)  $\frac{1}{x} + 1 = x-1$

**1 159.** Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż równanie

a)  $x^2 = (x-2)^2$       b)  $2 = x = x$       c)  $\sqrt{x-2} = \sqrt{x-6} + 2$

**1 160.** Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{x-3}$ . Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) < 1$ .

**1 161** Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$ . Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) < 2$ .

**1 162** Narysuj wykres funkcji  $f(x) = (x-2)^2 - 3$ . Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) > 1$ .

**1 163.** Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$  oraz  $g(x) = x-2$ .

- a) Podaj argument dla którego funkcje  $f$  i  $g$  przyjmują tę samą wartość.  
b) Rozwiąż nierówność  $f(x) > g(x)$ .

**1 164.** Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż nierówność

a)  $x^3 = x$       b)  $\sqrt{x-2} = 5 + \frac{1}{2}x$       c)  $\sqrt{x-1} = x+2$

**1 165** Korzystając z wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż nierówność

a)  $|x - \frac{1}{2}| = 3$       b)  $\frac{1}{x-1} = (x+1)^2$       c)  $\frac{1}{x-4} = 1 - x-5$

**1 166.** Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \sqrt{x-3}$  gdzie  $x \in \mathbb{R}$ . Następnie rozwiąż

a) równanie  $f(x) = 1$       b) nierówność  $f(x) < 1$

**1 167** Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Następnie rozwiąż

a) równanie  $f(x) = 1$       b) nierówność  $f(x) > 1$

**1 168** Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  gdzie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Następnie rozwiąż

a) równanie  $f(x) = 2$       b) nierówność  $f(x) \leq 2$

**1 169** Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznacz zbiór rozwiązań równania

a)  $|x| = 2$       b)  $\frac{2}{x-3} = 1 - x + 1$

b)  $x = 2, 6$       c)  $\frac{3}{x-4} = x-1$

**1 170.** Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznacz zbiór rozwiązań nierówności

a)  $\frac{1}{2}x^3 \leq (x-2)^2 + 4$       b)  $|x-3| < 3$

c)  $2 = x = \sqrt{x}$       d)  $(x-4)^2 = x+1$

**1 171** Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznacz zbiór rozwiązań nierówności

a)  $4\sqrt{x+2} \geq x+2+4$       b)  $|(x-1)^2 - 4| > x+1$

c)  $5 - (x-3) > \frac{5}{4-x}$       d)  $\frac{2}{|x|} \leq x^2 + 1$

## Test sprawdzający do rozdziału 1

1. Środek odcinka  $AB$  ma współrzędne  $(13, -2)$ . Jeśli  $A(7, 4)$ , to:

- A.  $B(3, 1)$       B.  $B(10, -6)$       C.  $B(23, 8)$       D.  $B(33, -8)$

2. Wektorem przeciwnym do wektora  $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  jest wektor o współrzędnych

- A.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$       B.  $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$       C.  $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. Długość wektora  $b = [-3, 4]$  jest równa:

- A. 7      B. 5      C. 4      D. 3



4. Jeśli  $A(9, -2)$  i  $\vec{AB} = [-6, 7]$ , to punkt B ma współrzędne:

- A.  $(-3, -5)$       B.  $(3, 5)$       C.  $(5, 3)$       D.  $(3, -5)$

5. Dany jest wektor  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Wskaż wektor, który nie jest równoległy do wektora  $\vec{u}$ .

- A.  $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$       B.  $\vec{b} = [-3, 2]$       C.  $\vec{c} = \begin{bmatrix} 57 \\ 38 \end{bmatrix}$       D.  $\vec{d} = [-2, 3]$

6. W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$  o 4 jednostki do góry otrzymamy wykres funkcji:

- A.  $g(x) = \sqrt{x} + 4$       B.  $g(x) = \sqrt{x} - 4$   
C.  $g(x) = \sqrt{x+4}$       D.  $g(x) = \sqrt{x-4}$

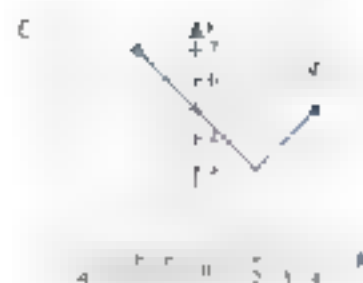
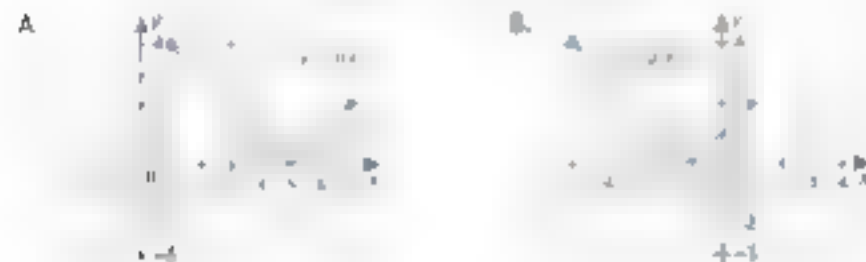
7. Wykres funkcji  $f(x) = x - 5 - 1$  powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $y = \mu_1^2$  o wektor:

- A.  $\vec{u} = [5, 1]$       B.  $\vec{u} = [5, -1]$       C.  $\vec{u} = [-5, 1]$       D.  $\vec{u} = [-5, -1]$

8. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji  $y = f(x)$ .



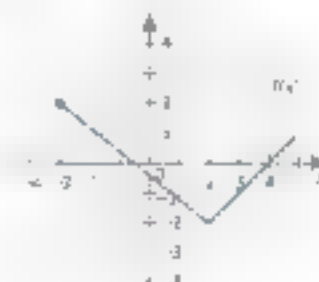
Wykres funkcji  $g(x) = f(x - 3)$  przedstawiony jest na rysunku:



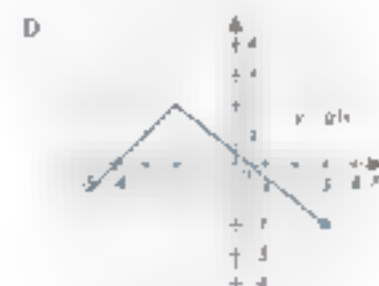
9. W wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $f(x) = x^2 + 3x + 2$  przez symetrię względem osi  $OX$  otrzymujemy wykres funkcji, określonej wzorem:

- A.  $y = x^2 + 3x + 2$       B.  $y = -x^2 + 3x + 2$       C.  $y = x^2 - 3x + 2$       D.  $y = -x^2 - 3x + 2$

10. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji  $y = f(x)$ .



Wykres funkcji, określonej wzorem  $g(x) = f(x)$  znajduje się na rysunku:



11. Dzielącą funkcję  $f$  jest przedział  $[-3, 2]$ . Wykres funkcji  $f$  przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $OY$  i otrzymano wykres funkcji  $g$ . Dzielącą funkcji  $g$  jest przedział:

- A.  $[-2, 3]$  B.  $[-2, 3]$  C.  $[-3, 2]$  D.  $[-3, 2]$

12. Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $[-3, 1]$ . Wykres funkcji  $f$  przekształcono przez symetrię osiową względem osi  $OX$  i otrzymano wykres funkcji  $g$ . Wskaż zbiór wartości funkcji  $g$ :

- A.  $[-5, 1]$  B.  $[-5, 1]$  C.  $[-1, 5]$  D.  $[-1, 5]$

13. Funkcja  $y = f(x)$  ma dwa miejsca zerowe  $-3$  oraz  $1$ . Miejscami zerowymi funkcji  $y = f(x+3)$  są liczby:

- A.  $-2$  oraz  $2$  B.  $-4$  oraz  $0$  C.  $-2$  oraz  $0$  D.  $-4$  oraz  $2$

14. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji  $f$ , określonej w przedziale  $(-1, 8)$ . Wskaż zbiór rozwiązań równania  $f(x+1) = 2$ :

- A.  $\{1\}$  B.  $\{3, 5\}$   
C.  $\{2, 4\}$  D.  $\{4, 6\}$



15. Wykres funkcji  $f$  jest przedstawiony w zadaniu 14. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności  $f(x+1) > 0$ .

- A.  $[2, 6]$  B.  $[-1, 2] \cup [6, 8]$  C.  $[-8, 6] \cup [2, 1]$  D.  $[0, 8]$

## Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

16. Dany jest punkt  $B(4, -3)$  oraz wektor  $\vec{AB} = \{-2, 5\}$ . Oblicz:

- a) współrzędne punktu  $A$ ,  
b) współrzędne punktu  $C$  jeśli  $\vec{AC} = -3\vec{AB}$

17. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $A(7, -1)$ ,  $B(5, 1)$  oraz  $\vec{BD} = \{-9, 3\}$  gdzie  $D$  to środek boku  $AC$ . Oblicz współrzędne punktu  $D$  oraz długość boku  $AC$ .

18. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $A(5, 2)$ ,  $B(3, -4)$ ,  $C(1, 5)$ . Wyznacz współrzędne punktu  $D$  tak, aby figura  $ABCD$  była równoległobokiem.

19. Dane są punkty  $A(0, -3)$ ,  $B(4, -1)$ ,  $C(5, 3)$ ,  $D(-3, -1)$ . Korzystając z własności wektorów wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest trapezem.

20. Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = x - 10$ . Wykres funkcji  $g$  powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f$  o 3 jednostki w lewo.

- a) Napisz wzór funkcji  $g$ .  
b) Do wykresu funkcji  $g$  należy punkt  $(-3, a)$ . Oblicz  $a$ .

21. Wykres funkcji liniowej  $f(x) = 3x + 5$  przesunięto o 2 jednostki w prawo i otrzymano wykres funkcji  $g$ .

- a) Podaj wzór funkcji  $g$ .  
b) O jaki wektor można przesunąć wykres funkcji  $g$  względem osi  $OY$  aby otrzymać wykres funkcji  $f$ ?

22. Wykres funkcji  $f(x) = 2x$  przesunięto równoległe o wektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  i otrzymano wykres funkcji  $g$ . Wykaż, że  $g(x) = 2x^2 + 4x + 2$ .

23. Funkcja liniowa  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = 2x - 3$ . Napisz wzór funkcji:

- a)  $g$  której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji  $f$  względem osi  $OX$   
b)  $h$  której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji  $f$  względem osi  $OY$   
c)  $k$  której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji  $f$  względem punktu  $O(0, 0)$ .

24. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $y = f(x)$ .

- a) Naszkicuj wykres funkcji  $y = g(x)$ , gdzie  $g(x) = f(x)$ .  
b) Podaj zbiór rozwiązań równania  $g(x) = -2$ .



25. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $y = f(x)$ .

- a) Naszkicuj wykres funkcji  $y = g(x)$  gdzie  $g(x) = f(x)$ .  
b) Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja  $g$  jest rosnąca.



26. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $y = f(x)$ .

a) Naszkicuj wykres funkcji  $y = g(x)$ , gdzie  $g(x) = f(x - 2) + 1$ .

b) Podaj zbiór rozwiązań nierówności  $g(x) < 0$ .



27. Dziedzina funkcji  $f$  jest zbiór  $D = \{4, 8\}$ , a jej zbiorem wartości jest zbiór  $ZW_f = \{-3, +\infty\}$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji:

a)  $y = f(x)$       b)  $y = f(x)$       c)  $y = f_1(x + 3) - 4$

28. Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{x}{2} + 1$  gdzie  $x \in [2, 0] \cup [0, 2]$ .

a) Podaj wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $f$  przez symetrię środkową względem punktu  $O(0, 0)$ .

b) Na podstawie wykresu funkcji  $g$  rozwiąż nierówność  $g(x) > 1$ .

29. Rozwiąż graficznie równanie:

a)  $\frac{1}{x+5} = x - 3$       b)  $x - 1 = 2x - 2$       c)  $x = x^2 - 6$

30. Rozwiąż graficznie nierówność:

a)  $x < \sqrt{x}$       b)  $x - 2 < x$       c)  $\frac{4}{x+1} < x + 6$

31. Podaj dwa kolejne przekształcenia, które można wykonać, aby z wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$  otrzymać wykres funkcji:

a)  $g(x) = 7 - \sqrt{x}$       b)  $h(x) = \sqrt{7 - x}$       c)  $k(x) = (\sqrt{x} - 7)^2$

32. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $f$ .

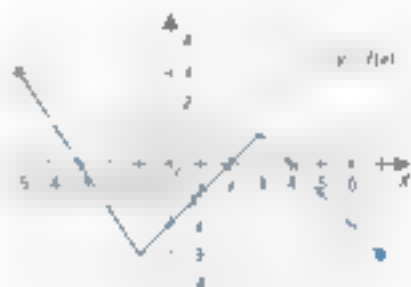
a) Naszkicuj wykres funkcji  $g$ , określonej wzorem  $g(x) = f(-x) + 1$ .

b) Podaj dziedzinę funkcji  $g$ .

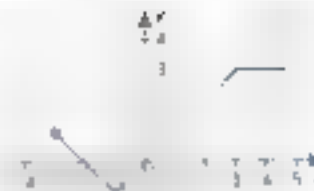
c) Podaj zbiór wartości funkcji  $g$ .

d) Oblicz wartość wyrażenia

$$[g(-4) + g(5)] [g(-3) - g(1)]$$



33. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji  $y = f(x)$ . Wykres funkcji  $y = g(x)$  otrzymujemy na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  w wyniku następujących przekształceń:



$$y = f(x) \xrightarrow{T_{-1, -1}} y = f(x) \xrightarrow{y = \frac{1}{4} f(x)} y = f(x) \xrightarrow{S_{Oz}} y = f(x) \xrightarrow{T_{-1, -1}} y = g(x)$$

a) Naszkicuj wykres funkcji  $y = g(x)$ .

b) Napisz wzór funkcji  $g$  za pomocą wzoru funkcji  $f$ .

34. Na lekcji matematyki dwójce uczniów przedstawiło swój pomysł na naszkicowanie wykresu funkcji  $g$  określonej wzorem  $g(x) = 2 - \frac{1}{4}\sqrt{x - 3}$  na podstawie wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Pomysł Konrada

$$y = f(x) \xrightarrow{T_{-3, -1}} y = f(x) \xrightarrow{y = \frac{1}{4} f(x)} y = \frac{1}{4} f(x) \xrightarrow{S_{Oz}} y = f(x) \xrightarrow{T_{-3, -1}} y = g(x)$$

Pomysł Wiktorii

$$y = f(x) \xrightarrow{T_{-3, -1}} y = f(x) \xrightarrow{y = \frac{1}{4} f_1(x)} y = f(x) \xrightarrow{S_{Oz}} y = g(x)$$

a) Wykaż, że oba przedstawione rozwiązania są poprawne.

b) Naszkicuj wykres funkcji  $y = g(x)$  każdą z przedstawionych metod.

35. Rozwiąż graficznie równanie

$$a) 2x + \frac{1}{2}x = 0 \quad b) \frac{1}{2}(x - 2)^2 = 2 - x$$

36. Rozwiąż graficznie nierówność

$$a) (x - 1)^2 < |x - 1| + 2 \quad b) \sqrt{x} = 2 - \frac{2}{x - 1}$$



37. Narysuj wykres funkcji  $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$  a następnie:

- podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ ,
- wyznacz przedziały monotoniczności funkcji  $g$ ,
- wykaż, że funkcja  $g$  jest parzysta
- rozwiąż nierówność  $\frac{2}{|x|-3} \geq x$

38. Jednym z rozwiązań równania  $\frac{x^2}{|x|-2} = x + m$  z niewiadomą  $x$  i parametrem  $m$  jest liczba  $-4$ .

- Oblicz  $m$ .
- Dla wyznaczonej wartości parametru  $m$  na podstawie wykresów odpowiednich funkcji wyznacz zbiór rozwiązań nierówności  $\frac{x^2}{|x|-2} < x + m$

39. Jednym z rozwiązań równania  $\sqrt{x} = \frac{1}{2}m - x$  z niewiadomą  $x$  i parametrem  $m$  jest liczba 1.

- Oblicz  $m$ .
- Dla znalezionej wartości parametru  $m$  określ liczbę rozwiązań równania  $\sqrt{x} = \frac{1}{2}m - x$

40. Narysuj wykres funkcji  $g(x) = \frac{1}{2} \cdot |x+4| - 2$ .

- Na podstawie wykresu funkcji  $g$  rozwiąż równanie  $g(x) = 3$
- Podaj wzór funkcji  $g$  bez użycia znaku wartości bezwzględnej
- Wykaż, że w przedziale  $(-8, -4)$  funkcja  $g$  jest rosnąca.

41. Narysuj wykres funkcji  $g(x) = (|x| + 3)^2 + 4$

- Podaj zbiór wartości funkcji  $g$
- Oblicz miejsca zerowe funkcji  $g$ .
- Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności  $g(x) > 0$ .

## 2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

### Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

2.1 Oblicz

a)  $-2\frac{1}{2} + \left|1\frac{1}{2}\right|$

b)  $\left|-2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\right|$

c)  $|-2,6| - |-3,3|$

d)  $|\sqrt{2} - 3|$

e)  $|2 - \sqrt{5}|$

f)  $|2\sqrt{3} + \sqrt{12}|$

2.2 Oblicz wartość danego wyrażenia. Ocen, jaką liczbą wymierną czy niewymierną jest wynik obliczeń.

a)  $2\sqrt{3} \cdot |3 - 2\sqrt{3}|$

b)  $2\pi - |2\pi - 7|$

c)  $3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1$

d)  $\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

e)  $3 - \pi + \pi - 3$

f)  $1 - \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}$

2.3. Oblicz wartość danego wyrażenia. Ocen, jaką liczbą wymierną czy niewymierną jest wynik obliczeń.

a)  $3\sqrt{2} - \sqrt{6} - 3\sqrt{6}$

b)  $\pi - \sqrt{2} - \sqrt{2}$

c)  $1,8 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 3$

d)  $8 - 8 - \pi$

2.4. Oblicz wartość wyrażenia.

a)  $(\sqrt{5} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{6}) - 3 \cdot (\sqrt{20} - 2 \cdot |\sqrt{5} - 2|)$

b)  $(\sqrt{75} - 4\sqrt{3} - \sqrt{27} - \sqrt{108} - 1)(1 - 2\sqrt{3})$

c)  $|4\sqrt{2} - 3\sqrt{8} + 5| - 2\sqrt{2} - 5$

d)  $3\sqrt{5} - 2\sqrt{125} - 10 + 7\sqrt{5} - 10$

2.5. Oblicz wartość wyrażenia:

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$

c)  $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{2\sqrt{2} \cdot 3}$

b)  $\frac{4 \cdot \sqrt{5} \cdot 20 \cdot 4}{4(4 \cdot 5 \cdot 9)}$

d)  $\frac{(5 \cdot \sqrt{2} \cdot 2)(5 \cdot \sqrt{2} \cdot 2)}{\sqrt{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{5}} \cdot \frac{3}{6 \cdot \sqrt{5}}$

2.6. Oblicz wartość wyrażenia:

a)  $2a - |a - 3|$ , jeśli  $a = -4$

b)  $|2a - 3| - (3 + 2a)$ , jeśli  $a = -\sqrt{3}$

2.7. Oblicz wartość wyrażenia:

a)  $-1 - |2 - b| + b$ , jeśli  $b = 3$

b)  $b - |b + 1|$ , jeśli  $b = \sqrt{2}$

2.8. Oblicz wartość wyrażenia  $a^2 - 200 - 3a + 2a$  w przypadku gdy:

a)  $a = -10$

b)  $a = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^6$

2.9. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

a)  $|a - 2|$ , jeśli  $a \in [2, +\infty)$

b)  $|3 + a|$ , jeśli  $a \in (-\infty, -3]$

c)  $|3a - 2|$ , jeśli  $a \in (1, +\infty)$

d)  $|4 - 8a|$ , jeśli  $a \in (1, +\infty)$

2.10. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

a)  $-2a - |a - 3|$ , jeśli  $a \in (-\infty, -1)$

b)  $|1 + 2a| + |3a|$ , jeśli  $a \in (-\infty, -2)$

c)  $2a - |3 - |a||$ , jeśli  $a \in (4, +\infty)$

d)  $|2a| - |1 - |a||$ , jeśli  $a \in (-\infty, -3)$

2.11. Napisz wzór funkcji  $f$  bez użycia symbolu wartości bezwzględnej. Następnie narysuj wykres funkcji  $f$  w układzie współrzędnych.

a)  $f(x) = x - |x|$

b)  $f(x) = 2|x + 3|$

c)  $f(x) = 3 - |3 - 3x|$

d)  $f(x) = -\left|1 - \frac{1}{3}x\right| + 2$

2.12. Napisz wzór funkcji  $f$  bez użycia symbolu wartości bezwzględnej. Następnie narysuj wykres funkcji  $f$  w układzie współrzędnych.

a)  $f(x) = x - x$

b)  $f(x) = \frac{2x}{x} + 1$

c)  $f(x) = 0,5x - 1 + x$

d)  $f(x) = x - 4 + x$

D 2.13. Wykaż, że wartość podanego wyrażenia jest stała.

a)  $|a - 3| - |a - 2|$ , jeśli  $a \in (-\infty, 0)$

b)  $|4 - a| + 2 + a$ , jeśli  $a \in (-2, 4)$

c)  $|a - 3| - |a + 4|$ , jeśli  $a \in (3, +\infty)$

d)  $|a + 1| - |a + 5|$ , jeśli  $a \in (-\infty, -5)$

D 2.14. Wykaż, że jeśli  $a$  jest liczbą ujemną i  $b$  jest liczbą dodatnią, to  $-3a + 4b - 2(3b - a) = -a + 2b$ .D 2.15. Wykaż, że jeśli liczby  $x$  i  $y$  są ujemne, to  $|2x + y| - |2x - y| \cdot |4x^2 + y^2| = 4xy$ .D 2.16. Wykaż, że jeśli  $a > b > 0$ , to  $2(b^2 - |ab|) + |b - a| \cdot |a + b| > 0$ .

2.17. Oblicz:

a)  $1 + \log_9 \frac{5+8}{3} - 2 \log_4 \frac{4}{3}$

b)  $2 - |2 \log_5 25 - 81^{\frac{2}{3}}| \cdot \left| (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) \right|$

c)  $3 \log_9 0,25 - \sqrt[3]{216} - 0,75 - \sqrt{3} - \sqrt{3}$

d)  $|3^{2\log_3 2} - 9| \cdot 16^{\frac{3}{2}} - 0,5^{-1} - \log_{0,9} 9$

**Odległość między liczbami na osi liczbowej.  
Geometryczna interpretacja wartości  
bezwzględnej na osi liczbowej**

2.18. Dane są liczby  $a$  i  $b$ . Wyznacz na osi liczbowej liczbę  $c$  równoodległą od liczb  $a$  i  $b$ . Jaka jest odległość  $d$  liczby  $c$  od liczby  $a + b$ ?

a)  $a = -2$ ,  $b = 4$

b)  $a = -2$ ,  $b = 5$

c)  $a = -8,4$ ,  $b = 15$

d)  $a = 3\frac{1}{3}$ ,  $b = 87\frac{5}{6}$

e)  $a = 3\sqrt{7}$ ,  $b = 29\sqrt{7}$

f)  $a = 9 - 4\sqrt{5}$ ,  $b = 5 - 2\sqrt{5}$

**2.19.** Wyznacz liczby, które znajdują się na osi liczbowej w odległości  $d$  od liczby  $a$ , jeśli:

a)  $a = 2, d = 3$

b)  $a = 2, d = 5$

c)  $a = -7, d = 26$

d)  $a = \sqrt{2}, d = 3$

e)  $a = 3, d = \pi - 1$

f)  $a = 1 + \sqrt{3}, d = 4 - \sqrt{3}$

**2.20.** Zaznacz na osi liczbowej i zapisz za pomocą przedziału zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, których:

a) odległość na osi liczbowej od liczby 4 jest mniejsza od 5 lub równa 5.

b) odległość na osi liczbowej od liczby 3 jest mniejsza od 4.

c) odległość na osi liczbowej od liczby -2 jest większa od 3 lub równa 3.

d) odległość na osi liczbowej od liczby -5 jest większa od 2.

e) odległość na osi liczbowej od liczby 6 jest nie mniejsza niż 1.

f) odległość na osi liczbowej od liczby -4 jest nie większa niż 5.

**2.21.** Zapisz odległość na osi liczbowej między danymi liczbami, używając znaku wartości bezwzględnej. Następnie oblicz tę odległość.

a) 4 i 28

b)  $-14\frac{2}{3}$  i  $16\frac{2}{3}$

c) 0 i  $2\sqrt{3}$

d)  $2\sqrt{2}$  i  $4\sqrt{2} + 3$

e)  $\sqrt{3}$  i  $1 - \sqrt{3} - 7$

f)  $1 - 2\sqrt{3}$  i  $4 + 2\sqrt{3}$

**2.22.** Zapisz poniższe zdanie, używając symbolu wartości bezwzględnej.

a) Odległość liczby  $x$  od liczby 0 jest równa 8.b) Odległość liczby  $y$  od liczby 5 jest równa 1.c) Odległość liczby  $(-3)$  od liczby  $a$  jest równa 4.d) Odległość liczby  $s$  od liczby 8 jest mniejsza od 3.e) Odległość liczby  $p$  od liczby -2 jest większa od 7.f) Odległość liczby  $k$  od liczby -1 jest nie większa od 5.g) Odległość liczby 7 od liczby  $m$  jest nie mniejsza od 2.

**2.23.** Wyznacz odległość między danymi liczbami  $a$  i  $b$  w zależności od  $m$ , jeśli:

a)  $a = 12 - 3m$  i  $b = 5m - 4$  i  $m \in (-\infty, 2)$

b)  $a = \frac{+2m}{5} - 9$  i  $b = 5 - 3,6m$  i  $m \in (3, +\infty)$

c)  $a = m^2 + 5m - 6$  i  $b = (m - 3)^2$  i  $m \in (0, +\infty)$

d)  $a = (m - 4)^2$  i  $b = -8m - 17$  i  $m \in \mathbb{R}$

## Proste równania z wartością bezwzględną

**2.24.** Sprawdź, które z podanych liczb są rozwiązaniami równania

a)  $2|x| = 6$  D: -3, 3

b)  $|x + 3| = 7$  D: -4, -10, 4

c)  $|x - 2| = -6$  D: -4, 2

d)  $|x + 5| = 0$  D: 3, -5

**2.25.** Rozwiąż równanie:

a)  $|x| = \frac{1}{5}$

b)  $|x| = -2$

c)  $3|x| = \sqrt{18}$

d)  $5|x| + 10\sqrt{3} = 0$

e)  $-\frac{|x|}{3} + 1 = 1$

f)  $\frac{3|x| + 1}{2} = 5$

**2.26.** Rozwiąż dane równanie, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a)  $|x - 2| = 3$

b)  $|x + 1| = 4$

c)  $|3 - x| = 0$

d)  $2 + x = 1$

e)  $x - 5 = 2$

f)  $4 - x = 5$

**2.27.** Rozwiąż dane równanie, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a)  $|9 + x| = 0$

b)  $|3 - x| = 8$

c)  $|16 + x| = 5$

d)  $|x - 21| = 3$

e)  $|-1 - x| = 7$

f)  $|-2 - x| = 2$

**2.28.** Zapisz równanie z niewiadomą  $x$  typu  $|x - a| = b$ , które:

a) ma jedno rozwiązanie, równe 11.

b) ma jedno rozwiązanie, równe -19.

c) jest sprzeczne.

d) ma dwa rozwiązania: -8 i 8.

e) ma dwa rozwiązania: 3 i 7.

f) ma dwa rozwiązania:  $3\pi$  i  $-7\pi$ .

**2.29.** Zapisz równanie z niewiadomą  $x$  typu  $|x - a| = b$  którego zbiorem rozwiązań jest zbiór:

a)  $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

b)  $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$

c)  $[-3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}]$

d)  $[5, 17]$

e)  $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

f)  $[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$



**2.30.** Rozwiąż algebraicznie równanie:

a)  $x - 1 = 2$

b)  $x + 4 = 0$

c)  $x - 1 = 4$

d)  $2 + x = 3$

e)  $x - 3 + 7 = 0$

f)  $x + 5 = 0$

**2.31.** Rozwiąż algebraicznie równanie:

a)  $x + 2 = 6,8$

b)  $3,4 + x = 0,6$

c)  $2,5 + x = 0$

d)  $7 + x = 2,1$

e)  $0,2 + x = 0,4$

f)  $0,1 + x = 1$

**2.32.** Rozwiąż algebraicznie równanie:

a)  $\frac{3|x-2|}{4} = 1,5$

b)  $\frac{x-2,4}{3} + 2 = 1$

c)  $\frac{5+x-12}{8} = 0$

d)  $\frac{4-x-2}{3} = 4,8$

e)  $\frac{3-x-5,3}{2} = 8$

f)  $\frac{6-2-x-1}{3} = -4$

**2.33.** Rozwiąż równanie

a)  $x - \sqrt{2} + 3 = \sqrt{2}$

b)  $3,2\sqrt{5} - x = 21 - 9\sqrt{5}$

c)  $\frac{|x-2\sqrt{3}|}{3} = 2 - \sqrt{3}$

d)  $0,2|-x-5\sqrt{2}| = \frac{1}{5} + \sqrt{2}$

e)  $\frac{\sqrt{2}-x+\sqrt{2}}{3} = 1$

f)  $\frac{x-2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} = 4$

**2.34.** Rozwiąż równanie.

a)  $3x + 7 = 2$

b)  $25x - 3 = 122$

c)  $9 - 4x = 21$

d)  $|1 - 2x| = 13$

e)  $|-8x + 5| = 11$

f)  $|-2 - 5x| = 16$

**2.35.** Rozwiąż równanie graficznie, szkicując wykres odpowiedniej funkcji

a)  $|x - 4| = 2$

b)  $3 + x = 1$

c)  $1 + x = 4$

d)  $|x - 1| = 5$

e)  $|2x - 6| = 0$

f)  $|0,5x + 1| = 3$

**2.36.** Dane są zbiory:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \wedge 3,2 \leq x \leq 4 \vee x = 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \wedge x + 5 = 2,5 - x\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \wedge 2(|x+1|-3) = |1+x|-2\}$$

a) Wypisz elementy zbiorów  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .b) Wyznacz zbiory:  $(B \cup C) \cap A$ ,  $(A - C) \cup B$ ,  $C - A \cap B$ .**2.37.** Rozwiąż równanie:

a)  $12 - 5|x| - 3(|x| + 5) = 4(|x| - 1) - 25$

b)  $|x + 3| - 5(|x + 3| - 1) = 4|-x - 3| + 2|-3 - x| - 45$

c)  $(-2|4 - x| + |x - 4|) - 3 = 5|-4 + x| - 16$

d)  $\frac{2|5+x|}{4} - \frac{7}{3} = \frac{|x-5|-10}{3} + |-5-x|$

e)  $\frac{3|2-x|}{2} - \frac{4-5}{5} - \frac{|x-2|}{5} = 7\frac{3}{5} - |-2+x|$

f)  $\frac{4-7|x|}{6} - \frac{3}{3} - \frac{x-7}{2} = \frac{4}{2} - \frac{7-x}{2}$

**2.38.** Rozwiąż równanie

a)  $\frac{2|x-3|-3\sqrt{2}}{5} - \frac{3-x-3}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{6,3-x}{10}$

b)  $\frac{6|x+6|-(-x-6)+4\sqrt{5}}{3} = x + 6 - 2\sqrt{5}$

c)  $|4\sqrt{3}-x| - \frac{x-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2} = \frac{2-x-4\sqrt{3}}{3} - \frac{1-\sqrt{3}}{3}$

d)  $\frac{3|x-3|-2,2}{2} - \frac{2,3-x-\sqrt{2}}{4} = \frac{5-x-3-\sqrt{2}}{8}$

**2.39.** Wyznacz liczbę  $m$  wiedząc, że jednym z rozwiązań danego równania z niewiadomą  $x$  jest liczba podana obok równania. Dla wyznaczonej wartości  $m$  znajdź drugie rozwiązanie tego równania (o ile istnieje).

a)  $|x - m + 1| = 2, \quad 5$

b)  $|3 - x + m| = 0, \quad 1$

c)  $|m - m + 5| = 9, \quad 7$

d)  $|x + m^2 - 4| = 1, \quad 4$

**2.40.** Podaj przykład równania z niewiadomą  $x$  typu  $|x - a| = b$ , które ma

a) jedno rozwiązanie ujemne,

b) dwa rozwiązania różnych znaków,

c) dwa rozwiązania dodatnie,

d) dwa rozwiązania ujemne,

e) dwa rozwiązania, z których jedno jest dodatnie a drugie równe zero,

f) dwa rozwiązania, z których jedno jest ujemne a drugie równe zero.

## Proste nierówności z wartością bezwzględną

2.41. Sprawdź, która z liczb podanych obok nierówności spełnia tę nierówność, jeśli:

a)  $5 \leq x \leq 2$  0,3 6 7

b)  $x + 3 = 5$  9, -4, -1, 6

c)  $x - 4| = 0$  2,  $3\frac{1}{2}$ , 4, 5

d)  $x \geq 0$  3, 2, 0, 1

2.42. Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

a)  $|x| = 0$  b)  $|x - 1| = 0$  c)  $|x| = 9$  d)  $2|x| = 4$

2.43. Podaj przykład nierówności z wartością bezwzględną, której zbiorem rozwiązań jest:

a) zbiór pusty b) zbiór jednoelementowy

c) zbiór liczb rzeczywistych d) zbiór  $\mathbb{R} - \{3\}$

2.44. Rozwiąż nierówność, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a)  $|x_1| = 4$  b)  $|x_1| = 6$  c)  $|x_1| = 9$

d)  $|x_1| \leq 2$  e)  $|x_1| - 5 \leq 3$  f)  $2|x_1| - 2\sqrt{3} > 0$

2.45. Rozwiąż nierówność, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a)  $|x - 4| = 3$  b)  $|x + 1| = 2$  c)  $|x - 2| = 0$

d)  $4 - 1 = |x| = 0$  e)  $3 - |x - 1| = 0$  f)  $5 + |x - 2| = 0$

2.46. Rozwiąż nierówność, korzystając z odległości między liczbami na osi liczbowej.

a)  $|x + 4| = 2$  b)  $1 - |x| = 1$  c)  $3|x_1| + 8 = 2$

d)  $0 < 4 - |x - 4|$  e)  $-|9 - x_1| \geq -3$  f)  $3 - 3|6 + x_1| < 0$

2.47. Zapisz nierówność z wartością bezwzględną, jeśli dany jest jej zbiór rozwiązań

a)  $(-9, 9)$  b)  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$  c)  $(-4, 12)$

d)  $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$  e)  $(-\infty, 5) \cup (7, +\infty)$  f)  $(0, 10)$

g)  $(-9, 9)$  h)  $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$  i)  $(-2\pi, 4\pi)$

2.48. Korzystając z wykresu odpowiedniej funkcji rozwiąż graficznie nierówność

a)  $|x - 5| > 1$  b)  $|x - 3| \leq 2$  c)  $|4 + x_1| \leq 3$

d)  $|2x - 4| \leq 0$  e)  $|0,5x - 1| > 2$  f)  $|-2(x + 1)| > -4$

2.49. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a)  $|x + 14| - 84 < 0$  b)  $0 = 14 - 26 - x$  c)  $0,25 + x = 1,25$

d)  $10|x - 1,3| < 18$  e)  $|0,3x + 1| \leq 0$  f)  $2|x - 0,3| + 3 > 0$

2.50. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a)  $|x - \sqrt{2}| = 1$  b)  $|x + 3 + x - 2\sqrt{3}|$  c)  $|x - \sqrt{5}| = 0$

d)  $|3 - x| < 2 - \sqrt{6}$  e)  $|x - \sqrt{2} + 1| > 1$  f)  $|x + \sqrt{3} + 5| < 4$

2.51. Rozwiąż algebraicznie nierówność.

a)  $|3x + 13| \leq 100$  b)  $|12x - 2| < 30$  c)  $|4 - 5x| > 13$

d)  $|17 - 8x| \geq 5$  e)  $1 - |2x - 7| \leq 0$  f)  $3 - |2 - 5x| > 0$

2.52. Rozwiąż nierówność.

a)  $0,7|x - 0,1| > 0$  b)  $3|x + 2| + 1\frac{5}{7} < 0$  c)  $2\left|5\frac{x}{3}\right| + 1\frac{1}{3} > 0$

d)  $2 + |6x + 5| > 1$  e)  $3 - |9x + 8| = 3$  f)  $|x - 2| = 1 + \sqrt{5}$

2.53. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności  $3 - x + 3 > 0$ , zaś zbiór B zbiorem rozwiązań nierówności  $|x + 4| \geq 1$ .

a) Wypisz wszystkie liczby parzyste należące do zbioru A.

b) Podaj przykład liczby wymiernej, która nie należy do zbioru B.

c) Wyznacz zbiory:  $A \cap B$  i  $B - A$ .2.54. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności  $4 - 2x \leq 0$ , zaś zbiór B zbiorem rozwiązań nierówności  $|x + 1| - 2 \leq 0$ .

a) Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B.

b) Wypisz wszystkie liczby naturalne należące do zbioru  $A \cup B$ .c) Podaj przykład liczby niewymiernej należącej do zbioru  $B - A$ .d) Wyznacz zbiór  $A' \cap B'$ .

2.55. Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające jednocześnie dwie nierówności.

a)  $|x - 2| < 3$  i  $3 - |x| > 0$  b)  $|x + 1| = 4$  i  $|x - 2| = 4$  i  $0$

c)  $|x - 1,2| \leq 4$  i  $-2 + |x| \leq 0$  d)  $2|x - 0,4| < 5$  i  $|x + 0,1| = 0,4 < 0$

2.56. Rozwiąż nierówność podwójną.

a)  $|x - 2| < 3 < |x - 1| + 1$       b)  $2 \cdot |x + 1| \leq 2|1 + x| \leq 4$

2.57. Rozwiąż nierówność

a)  $3|x - 2| - 5|2 - x| \geq 4 \cdot 2 + x - 12$

b)  $|\sqrt{3} - x| - 2|x - \sqrt{3}| < 3(|-\sqrt{3} + x| + 1)$

c)  $-2(|x + 5| - 3|-5 - x|) - 4|5 + x| < |x + 5|$

d)  $7x - 1 \leq 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2 \leq x + 5$

e)  $5(|x - \sqrt{6}| - 2\sqrt{6}) - 6|\sqrt{6} - x| > 0$

f)  $-2(|x - 2\sqrt{3}| \cdot \sqrt{12}) + 3|2\sqrt{3} - x| \geq \sqrt{10x} - 1$

2.58. Rozwiąż nierówność

a)  $\frac{2 \cdot x - 0,5}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x - 0,5}{6} \cdot \frac{3}{6} > \frac{1}{6}$

b)  $1 \cdot \frac{3 \cdot |x - 1,7| - 4}{5} \leq \frac{|1,7 - x| - 2}{2} \cdot \frac{|x - 1,7| + 5}{10}$

c)  $\frac{4 \cdot \frac{7x - 9 + 1}{2}}{2} > \frac{\frac{5|9 - x| - 4}{3}}{3}$

d)  $\frac{\frac{8|x - 3| - 2}{4} - 1}{4} \leq \frac{|3 - x| + 6}{4} \cdot \frac{9}{3}$

2.59. Rozwiąż nierówność podwójną:

a)  $|x - 4| + 1 < 10 - 2|4 - x| < |x - 4| + 7$

b)  $2|-x - 5| - 4 < 1 - 3|x + 5| \leq 1 - 4|5 + x|$

c)  $-2|x - 1| + 1 \leq |x - 1| - 5 \leq \frac{|1 - x|}{2} - 4$

d)  $|-8 + x| - 3 < 2|x - 8| + 1 < 5(|8 - x| - 1)$

## Własności wartości bezwzględnej

2.60. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

a)  $x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x$

b)  $2 \cdot 2x \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x$

c)  $2|-2x - 3| - 8 - |6 + 4x|$

d)  $\sqrt{x^2 + 3} - |x|$

e)  $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2x$

f)  $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x$

2.61. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

a)  $\frac{1}{|x - 2|} \cdot (2 - x), x \neq 2$

b)  $\left| \frac{4x - 16}{3} \right| \cdot \left| \frac{6}{4 - x} \right|, x \neq 4$

c)  $\frac{x - 9}{\sqrt{x}} \cdot \frac{3x - 6}{4x - 4} \cdot \frac{6}{x - 3}$

d)  $\frac{\sqrt{9x - 6x + 1} \cdot 5}{x \cdot 2 \cdot 3x}, x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}$

e)  $\frac{(4x - 2)^2}{4|1 - 2x|}, x \neq \frac{1}{2}$

f)  $\frac{3\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{5(3x + 6)^2}, x \neq -2$

D 2.62. Udowodnij, że podana liczba jest całkowita.

a)  $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

b)  $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$

D 2.63. Wykaż, że prawdziwa jest równość

a)  $\sqrt{9} - 4\sqrt{5} - \sqrt{14} - 6\sqrt{5} = \sqrt{11} - 4\sqrt{2} - \sqrt{16} - 6\sqrt{7}$

b)  $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

2.64. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci, wiedząc, że  $x < -1$ .

a)  $2\sqrt{x}$

b)  $2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

c)  $\frac{\sqrt{x + 1} \cdot x \cdot 1 \cdot x}{x \cdot 1}$

2.65. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

a)  $\sqrt{a^2 + 4a + 4} - \sqrt{a^2 + 4a + 4}$ , jeśli  $a \in (-\infty, -2)$

b)  $\sqrt{9 + 6b + b^2} - 2\sqrt{9 - 6b + b^2}$ , jeśli  $b \in (3, +\infty)$



2.66. Uprość wyrażenie:

a)  $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} - 2\sqrt{x^2 + 3|x + 2|}$ , jeśli  $x \in (-\infty, -2]$

b)  $6|-x| - |-4x - 4| - \sqrt{25 - 10x + x^2}$ , jeśli  $x \in (0, 5)$

c)  $\sqrt{x - 2x - 36} - \sqrt{4x - 12x - 9}$ , jeśli  $x \in (6, +\infty)$

d)  $\frac{x - 3}{x + 1} \sqrt{x - 2x - 1} - \sqrt{4x - 24x - 36}$ , jeśli  $x \in [1, 3]$

2.67. Rozwiąż równanie:

a)  $3x - 6 = 14 + 25x - 10$

b)  $75x - 25 - 42 = 17x - 4$

c)  $|-9x - 6| + 26 + 2|10 + 15x| = 0$

d)  $8|12 + 20x| + 16 = 5| -40x - 24$

e)  $\sqrt{x + 40x + 25} - 5 - 3x = 8$

f)  $9x - 6 - 6 = 2\sqrt{9x^2 - 2x + 4}$

2.68. Rozwiąż równanie:

a)  $\sqrt{x^2} = |2x - 5|$

b)  $|4x - 6| = 2|3x - 1|$

c)  $\sqrt{1 + 4x + 4x^2} = 3 - x$

d)  $2 - 3|x - 4|$

e)  $|4 - 2x| = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

f)  $|2x - 7| - \sqrt{4x^2 - 10x + 25} = 0$

2.69. Rozwiąż równanie:

a)  $|x| + |x| \cdot |x - 1| = 0$

b)  $|x - 3| + |x^2 - 9| = 0$

c)  $|x - 1| + |x + 2| + |x - 5| = 0$

d)  $|x + 2| = -1|(x - 2)(x + 2)|$

D 2.70. Wykaż, że jeśli  $x \in \mathbb{R}$  i  $1, 1$ , to  $\frac{\sqrt{9x^2 - 18x + 9} - \sqrt{x - 2x - 1}}{3}$

D 2.71. Wykaż, że jeśli  $x > 2\frac{1}{2}$ , to wartość wyrażenia  $\frac{2x - 1 - 3\sqrt{4x - 20x - 25}}{10 - 4x}$  jest stała.

D 2.72. Wykaż, że jeśli  $a$  jest liczbą nieujemną, to  $\sqrt{9a} + \sqrt{36a} + 12a + 1 - 3a = 1$

D 2.73. Wykaż, że jeśli  $a \in (2, 4)$ , to  $2\sqrt{\sqrt{16 - 8a + a^2} - \frac{a^2 - 12}{4}} = a - 2$

D 2.74. Wykaż, że jeśli  $|x - 1| \leq 5$  i  $y \in \{-5, -1\}$ , to  $|x + y + 2| \leq 7$

D 2.75. Wykaż, że jeśli  $x \in \{-4, 8\}$  i  $|y + 5| \leq 10$ , to  $|x - y - 7| \leq 16$

D 2.76. Wykaż, że jeśli  $a$  jest liczbą ujemną, to  $\frac{\sqrt{a^2 - a + 0,25}}{a(0,5 - a)} = 1$

D 2.77. Wykaż, że jeśli  $x = 8, y = 45xy + 9y$  i  $x > 0$ , to  $\frac{x - 9y}{x + 9y} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

## Równania z wartością bezwzględną

2.78. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a)  $||x| - 6| = 8$

b)  $|x - 2| = 1$

c)  $|x + 1 - 4| = 3$

d)  $3|x - 1| = 9$

e)  $|7 - 2x - 5| = 6$

f)  $5 - 3x - 1 = 2 - 0$

2.79. Rozwiąż graficznie równanie:

a)  $||x| - 6| = 4$

b)  $||x| - 1| = 1$

c)  $||x - 3| + 2| = 7$

d)  $||x + 1| - 3| = 5$

e)  $|3 - 4 + x - 7| = 1$

f)  $|2x + 5 - 4 - 3|$

2.80. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a)  $|2 - x| = x - 1$

b)  $\sqrt{x^2} = 0,5x - 1$

c)  $6 + x = 2|x + 3|$

d)  $3x - 4 + 2 = 2x$

e)  $x - 1 - \sqrt{x - 2x - 1}$

f)  $3 - 2x - x - 3$

2.81. Rozwiąż graficznie równanie:

a)  $|3 - 4|x|| = 2x$

b)  $2|x + x - 3$

c)  $|1 - x| = x + 5$

d)  $|x + 2| = x + 2$

e)  $|x - 3 - 2x| = 6$

f)  $|4 - 2 - x| = \frac{x + 6}{3}$

2.82. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a)  $|x-1| + |x+3| = 4$

b)  $|x+2| = 7 - \sqrt{x^2}$

c)  $2x+3| - |x-1| = 4$

d)  $|x+3| = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 8$

e)  $x - x - 1 - x - 2x = 0$

f)  $x - 2 - 2x - 7 - 1 = x$

2.83. Rozwiąż graficznie równanie:

a)  $x + x - 2 = x - 1$

b)  $6 - 4x = x - 2 - 9x$

c)  $x - 1 + x - 6 = 3 - x$

d)  $3x - x + 5 = x$

2.84. Rozwiąż równanie:

a)  $2x - 5 = |4 - x|$

b)  $||x-3| - x| = 5$

c)  $3 - 3x - x - 1 = 4$

d)  $x - 2 - 2 = x$

e)  $x + 2 - 4 = 4 - x$

f)  $x - 1 - x - 1 = 3 - x$

2.85. Rozwiąż równanie

a)  $|x + 1| = x - x$

b)  $3x - 4 = 2x + 5$

c)  $(|x| - 1)(|x| + 1) = 24$

d)  $|x+3| + |4x+12| = 0$

e)  $1 - (3x + 2) = x$

f)  $|x - x| - |x + 3| = x - 2$

## Nierówności z wartością bezwzględną

2.86. Rozwiąż algebraicznie nierówność

a)  $||x| - 1| \leq 2$

b)  $||x-3| - 3| \geq 4$

c)  $||-x+2| - 5| > 1$

d)  $||2-x| - 4| < 2$

e)  $|2x-3| - 7 = 6$

f)  $2 - 3x - 6 = 1$

2.87. Rozwiąż graficznie nierówność

a)  $2x - 1 \leq 3$

b)  $x + 3 \geq 2$

c)  $|3 - |x+5|| \leq 1$

d)  $|2 - x - 3| \leq 0$

e)  $3 - |x-2| > 2$

f)  $2|x-1| \leq 4$

2.88. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a)  $|x| + 2x > 2$

b)  $x + 4|x+1| > 0$

c)  $2 - x + 5 = 0$

d)  $1 - 2x = x + 2$

e)  $|-4-3x| \leq 2x-4$

f)  $2|-7-x| + 1 \geq \frac{x}{5} - 25$

2.89. Rozwiąż graficznie nierówność:

a)  $|x-3| < x+3$

b)  $\frac{1}{2}|x| - 3 \geq x$

c)  $x - 1 + x = x$

d)  $2x - 4 = x - 1$

e)  $3|x-2| < 14-x$

f)  $\frac{1}{3}x + 4 = x - 1 - 3$

2.90. Rozwiąż nierówność

a)  $|8 - 5x + 2| > 10$

b)  $6 - 3x - 15x = 5$

c)  $|\sqrt{4x^2 + 20x + 25} - 6| > 1$

d)  $x - 4x + 4 = 3 < 3$

e)  $5 - 2|x+3| \geq -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

f)  $8 - 3x < \sqrt{25x^2 + 40x + 16}$

2.91. Rozwiąż nierówność podwójną:

a)  $|-2-x| < 4 < 3x - 1$

b)  $x - 1 \leq 2x - 1$

c)  $2 - 3x - 1 = x + 2$

d)  $|x+2| > x \geq 2x - 1$

e)  $1 - x - 2 = 3 - 5$

f)  $x - |2x-4| < 2 \leq |x|$

2.92. Rozwiąż nierówność

a)  $3\sqrt{9x^2 - 24x + 16} - x < |8 - 6x|$

b)  $9 - 3x - 2\sqrt{4x} \leq 4x + 36 - 3 + 2x$

c)  $-10x - 5| + 9 > |4x + 2| + 6x$

d)  $-5x - 2|5 - 5x| > |-3x + 3| - 16 \frac{1}{2}$

2.93. Rozwiąż nierówność:

a)  $2x - 3| > 16 + |x + 1|$

b)  $x - 4 + 6 = 2x - 5x$

c)  $2x - 2 = x - 1$

d)  $x - 3 = 2 - x - 2x - 1$

e)  $\frac{-2x-4}{2} \leq |3-x| > x+1$

f)  $3|x-1| - 2|x+5| < x+2$

## 2.94. Rozwiąż nierówność

a)  $|x+3| > 5 - |x|$

b)  $\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-8x+16} \leq 6$

c)  $|x-3| - 3 \leq x+4 < 0$

d)  $|x-1| + \sqrt{4x-20} \leq 25-9$

e)  $|x+9| - 7 \leq x - |x-1|$

f)  $3|x-3| - 4 \leq x - |5+x|$

## Równanie liniowe z parametrem

2.95. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$  dla których równanie z niewiadomą  $x$  ma jedno rozwiązanie. Wyznacz to rozwiązanie

a)  $(m+1)x = 1$

b)  $mx = 4x + m$

c)  $(m^2+1)x = \pi$

d)  $x\sqrt{m} = 2$

e)  $(m^2-9)x = m-3$

f)  $mx+4 = m^2-2x$

2.96. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$  dla których dane równanie z niewiadomą  $x$  jest tożsamościowe.

a)  $ax - p = 2 - 2x$

b)  $(a^2-25)x = 3a+15$

c)  $ax = a^3x$

d)  $(a^2+16)x = a+4$

e)  $ax - a^2 + 9 = 3x$

f)  $a^2x - 5ax - 2a^2 + 12a = 0$

2.97. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$  dla których dane równanie z niewiadomą  $x$  jest sprzeczne

a)  $k(x+1) = 2$

b)  $kx-3 = 2x-k$

c)  $k^2x + k = 0$

d)  $k^2x = kx$

e)  $k|x-4x| = k$

f)  $|x-kx| = 1-k$

2.98. Wyznacz wartości parametru  $m$  dla którego równanie z niewiadomą  $x$  ma co najmniej jedno rozwiązanie.

a)  $mx+m = m^2x+1$

b)  $x = m^2x$

c)  $(|m|-3)x = m+3$

d)  $2x = |m|(x+1)$

e)  $mx - m^2 = 4m + 4 - 2x$

f)  $\frac{mx}{m+1} = m+1$

2.99. Dane jest równanie z niewiadomą  $x$ . Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru. Gdy istnieje jedno rozwiązanie wyznacz je.

a)  $(2-|m|)x = m+2$

b)  $ax - 3x = a$

c)  $k(k-1)x = k$

d)  $b|x = 3x$

e)  $ax - a = 2x+4$

f)  $b|x+6| = b+36x$

2.100. Dane jest równanie z niewiadomą  $x$ . Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru. Gdy istnieje jedno rozwiązanie wyznacz je.

a)  $m|x-16x| = m^2$

b)  $(p-1)x = (1-p)^2$

c)  $(p+1)x - p(p+2) = 1$

d)  $4m^2x = m+x+0,5$

e)  $k|x-k^2-9k-3k$

f)  $m(x-1) = x+m-2$

2.101. Dane jest równanie z niewiadomą  $x$ . Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru  $m$ . Gdy istnieje jedno rozwiązanie wyznacz je.

a)  $x+3-m = \sqrt{m-2}, x$

b)  $|1-m|x-5m = 1-2x$

c)  $3m-2|x+4 = m^2+1$

d)  $|m-2|x = 1+mx$

e)  $2+m(1-x) = 2m-3|x$

f)  $m-2|5|x+16 = m(m-6)+x$

2.102. Dane jest równanie z niewiadomą  $x$ . Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań tego równania ze względu na wartości parametrów.

a)  $ax \pm 2b$

b)  $(1-m)x = k$

c)  $(2c+d)x = 0$

d)  $(5-p)x = k+1$

e)  $bx = cx+b$

f)  $bx = a(b-x)$

## Nierówność liniowa z parametrem

2.103. Dana jest nierówność  $3-4(x+k) \leq kx$  gdzie  $x$  jest niewiadomą,  $k$  parametrem. Wyznacz zbiór rozwiązań tej nierówności, jeśli:

a)  $k = 1$

b)  $k = 4$

c)  $k = 7$

2.104. Dana jest nierówność  $(b+4b)x \leq b-4x$  gdzie  $x$  jest niewiadomą,  $b$  parametrem. Wyznacz zbiór rozwiązań tej nierówności, jeśli:

a)  $b = 2$

b)  $b = -2$

c)  $b = 0$

2.105. Dana jest nierówność  $a^2x - 1 < x - a$  gdzie  $x$  jest niewiadomą,  $a$  parametrem. Wyznacz zbiór rozwiązań tej nierówności, jeśli:

a)  $a = 2$

b)  $a = 1$

c)  $a = 1$

**2 106.** Dana jest nierówność  $6 + m \leq 9x - 2m$ , gdzie  $x$  jest niewiadomą,  $m$  parametrem. Wyznacz zbiór rozwiązań tej nierówności, jeśli:

- a)  $m = 2$                       b)  $m = 3$                       c)  $m = -3$

**2 107.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których:

- a) zbiór rozwiązań nierówności  $5x - m - 8 \leq 0$  jest przedziałem  $(-\infty, 4)$   
 b) zbiór rozwiązań nierówności  $2x + 5m - 4 \leq 0$  jest przedziałem  $[3, \infty)$   
 c) zbiór rozwiązań nierówności  $3m - x - 2 \leq 9$  jest przedziałem  $(4, \infty)$   
 d) zbiór rozwiązań nierówności  $2x - 2(m - 1) \leq x + 11$  jest przedziałem  $[2, \infty)$ .

**2 108.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których zbiór rozwiązań danej nierówności jest przedziałem  $(0, +\infty)$ .

- a)  $(p + 1)x - (p + 1) + 4 \geq 0$                       b)  $(p - 2)x + 4p^2 - 20 \leq 0$

**2 109.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których zbiór rozwiązań danej nierówności jest przedziałem  $(-\infty, 0)$ .

- a)  $px + 3p - 27 < 0$                       b)  $2 \cdot p/x - p + 3 - 8 > 0$

**2 110.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których zbiór rozwiązań nierówności:

- a)  $3x + m - 1 < 0$  zawiera się w przedziale  $(-\infty, 1)$   
 b)  $4m - x \leq x + 3$  zawiera się w przedziale  $[1, +\infty)$   
 c)  $2x - 3m \geq 5$  zawiera się w przedziale  $(-5, +\infty)$   
 d)  $3(x - m) \geq 4x - m + 7$  zawiera się w przedziale  $(-\infty, 2)$ .

**2 111.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których zbiór rozwiązań nierówności:

- a)  $2k - x + 1 > x + 5$  jest przedziałem  $(-\infty, 10 - 3k)$   
 b)  $\frac{x - 2k}{5} - \frac{x - 2}{4} \leq x$  jest przedziałem  $(4, 6 + \infty)$   
 c)  $\frac{3x - 5k}{2} - \frac{2k - 1}{3} \leq \frac{x}{6}$  zawiera się w przedziale  $(-\infty, 5k + 2)$   
 d)  $\frac{x - k}{2} - \frac{2x + 3k}{3} \geq \frac{1}{6}$  zawiera się w przedziale  $(-\infty, 5 - 6k)$

**2 112.** Wyznacz wszystkie wartości  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których zbiorem rozwiązań nierówności:

- a)  $(m^2 - 1)x + m \geq 0$  jest zbiór  $\mathbb{R}$   
 b)  $(5 - m)x + 2m \leq 0$  jest zbiór  $\mathbb{R}$

c)  $(|m - 3| - 2)x - m > 0$  jest zbiór pusty

d)  $(9m^2 - 36)x + m^2 - 4m + 4 \leq 0$  jest zbiór pusty.

**2 113.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których dziedziną funkcji:

- a)  $f(x) = \sqrt{-x + m}$  jest przedział  $(-\infty, 2)$   
 b)  $f(x) = \sqrt{2x - 3m}$  jest przedział  $(6, +\infty)$   
 c)  $f(x) = \sqrt{(|m| - 1)x + 3}$  jest zbiór  $\mathbb{R}$   
 d)  $f(x) = \sqrt{(m^2 - 16)x - m}$  jest zbiór  $\mathbb{R}$   
 e)  $f(x) = \sqrt{m^2 x - 8m}$  jest przedział  $(4, +\infty)$   
 f)  $f(x) = \sqrt{6 - 2m + (|5 - m| + 3)x}$  jest przedział  $(-1, +\infty)$ .

## Równania liniowe z wartością bezwzględną i z parametrem

**2 114.** Dane jest równanie  $2|x - 2| = 3m(3m - x)$ , gdzie  $m$  jest parametrem,  $m \in \mathbb{R}$ . Rozwiąż to równanie, jeśli:

- a)  $m = 1$                       b)  $m = \frac{2}{3}$                       c)  $m = 0$                       d)  $m = -1$

**2 115.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

- a)  $|x| = 4 + 4k$  ma dwa rozwiązania  
 b)  $|x + 1| = 6 - 3k$  jest sprzeczne  
 c)  $|x + 5| = k^2 - 4|x + 5|$  ma dwa rozwiązania  
 d)  $3(|x - 6| - 3k^2) = 6k + 1$  ma jedno rozwiązanie  
 e)  $k \cdot |3x - 5| = k^2 - 4k$  jest sprzeczne  
 f)  $(25k^2 - 4)|3 - 2x| - 5k + 2 = 0$  jest tożsamościowe

**2 116.** Ustal liczbę rozwiązań danego równania z niewiadomą  $x$  ze względu na wartość parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$

- a)  $p \cdot |x + 1| = p^2$                       b)  $3|x - 7| = 6 - 3p$   
 c)  $p^2 + 4| -3 + x| = 0$                       d)  $|p| - 3| -x| = 0$   
 e)  $|px| - |x| = 2$                       f)  $|p + 2| \cdot |x - 3| = |12 - 4x| + 5$



**2.117.** Dane jest równanie z niewiadomą  $x$ . Przeprowadź dyskusję liczby jego rozwiązań w zależności od wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . Następnie podaj wzór funkcji  $f$ , która każdej liczbie rzeczywistej  $p$  przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.

$$\text{a) } |x+2| - 3 = 4 - p \qquad \text{b) } |x-3| - 4 = \frac{1-2p}{3}$$

**2.118.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $|9x - 27 - a| + a - 3 = x - 81$  ma dwa rozwiązania. Wyznacz te rozwiązania.

**2.119.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $4(|x+2| - 4) = k^2 + 8k - k|x-2|$  ma co najmniej dwa rozwiązania.

**2.120.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $m(|x-3| - (2-m)) = 0$  ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

**2.121.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

$$\text{a) } |x-2| = p-5 \text{ ma dwa rozwiązania dodatnie,}$$

$$\text{b) } |x+7| = 2+5p \text{ ma dwa rozwiązania ujemne.}$$

**2.122.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

$$\text{a) } 5 - 2x = \frac{3p-2}{2} \text{ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.}$$

$$\text{b) } 2+3x = \frac{4p-5}{2} = |6x+4| \text{ ma dwa rozwiązania ujemne.}$$

**2.123.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

$$\text{a) } |3+x| = 2k-3 \text{ ma tylko rozwiązania ujemne,}$$

$$\text{b) } |0,5x+1| = \frac{5-k}{7} \text{ ma tylko rozwiązania nieujemne.}$$

**2.124.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $3 - |x-2| = m+7$  ma więcej rozwiązań dodatnich niż ujemnych.

**2.125.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

$$\text{a) } x \cdot 2|x+2| = \frac{3-2k}{2} \text{ ma tylko rozwiązania niedodatnie,}$$

$$\text{b) } 3|x-2| \cdot 2x = 8k-4 \text{ ma tylko rozwiązania dodatnie.}$$

**2.126.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

$$\text{a) } 2x - |x+3| = \frac{2p+11}{3} \text{ ma jedno rozwiązanie dodatnie,}$$

$$\text{b) } |2x+3| - x = \frac{3p-6}{2} \text{ ma dwa rozwiązania dodatnie.}$$

**2.127.** Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań równania z niewiadomą  $x$  w zależności od wartości parametru  $p$ , jeśli

$$\text{a) } |x-2| + |x| = p \qquad \text{b) } 3x - 2x - 6 = 2p - 4$$

$$\text{c) } |2|x+1| - |2-x|| = 5+p \qquad \text{d) } |x-x-3| = \frac{4p-2}{5}$$

**2.128.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $|x-1-3|x+2|| - 3a - 4$  ma więcej rozwiązań ujemnych niż dodatnich.

**2.129.** Napisz wzór funkcji  $g$ , która każdej wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , przyporządkowuje liczbę rozwiązań danego równania. Następnie narysuj wykres tej funkcji.

$$\text{a) } x+4 = 2|1-x| + k-3$$

$$\text{b) } 3 - |x-1| = k-1$$

$$\text{c) } |x-6| - 2 = \frac{2k-4}{3}$$

$$\text{d) } 3 - x - 4; \quad x+1 + x = k + 2$$

## Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem

**2.130.** Oblicz wyznacznik

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{c) } \begin{vmatrix} 0,5 & 9 \\ -2 & 16 \end{vmatrix} \qquad \text{d) } \begin{vmatrix} \sqrt{17} & \sqrt{8} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

**2.131.** Rozwiąż dany układ równań, stosując wyznaczniki.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x - 7y = 6 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 6x - 5y = 4 \\ 11x - 12y = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x = 13 + 7y \\ 2 = 8y - 5x \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} \sqrt{3}x + 2y = 5 \\ 4x = 4 - 3\sqrt{3}y \end{cases}$$

**2.132.** Rozwiąż dany układ równań, stosując wyznaczniki.

$$a) \begin{cases} 3x + y = 23 \\ 23x - 2y - 21 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 0,4x + \frac{3}{7}y = 5 \\ 5y = 7x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = \sqrt{6} \\ \sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sqrt{2}x + (\sqrt{2} + 1)y = 2 \\ ((\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}y = 1 \end{cases}$$

**2.133.** Przeprowadź dyskusję istnienia liczby rozwiązań układu równań z parametrem  $a$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$ . W przypadku istnienia rozwiązań, wyznacz je.

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + ay = 2a \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - ay = 0 \\ ax - y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 8x + ay = a + 6 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} (a - 1)x - 2y = 3 \\ 4x - (a + 1)y = a \end{cases}$$

**2.134.** Przeprowadź dyskusję istnienia liczby rozwiązań układu równań z parametrem  $a$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$ . W przypadku istnienia rozwiązań, wyznacz je.

$$a) \begin{cases} a - 3, x - ay = 3 \\ ax + (a + 2)y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} ax + 3ay = 3 \\ x + ay = a - 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + ay = 3 \\ ax - 4y = 2a \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} ((a + 1)x + (a - 1)y = a^2 + 1 \\ (a - 1)x + (a + 1)y = a - 1 \end{cases}$$

**2.135.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} 3x - 7y = 2k - 7 \\ 2x - 5y = k - 2 \end{cases}$  jest para liczb  $(x, y)$ , spełniająca nierówność

$$5 - x + y < 7$$

**2.136.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} 2x - 3y = 4k - 5 \\ 3x - 5y = 9 - 6k \end{cases}$  jest para liczb  $(x, y)$  taka, że  $|xy| > 10$ .

**2.137.** Dla jakich wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , wykresy funkcji liniowych  $y = \frac{1}{2}x - \frac{a}{4}$  oraz  $y = \frac{3}{4}x - \frac{a+2}{3}$  przecinają się w punkcie, który należy do I ćwiartki układu współrzędnych i nie należy do żadnej osi tego układu?

**2.138.** Dla jakich wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , wykresy funkcji liniowych  $f(x) = -0,5x - \frac{a+2}{4}$  oraz  $g(x) = 1,5x + \frac{2a-1}{2}$  przecinają się w punkcie, który należy do wykresu funkcji  $h(x) = 0,5x + 4$ ?

**2.139.** Wykresy funkcji liniowych  $f(x) = 0,4x + p - 9$  oraz  $g(x) = 2x - p - 5$  przecinają się w punkcie, który należy do wykresu funkcji  $h(x) = 1 - 2|x - 3|$ .

a) Oblicz  $p$ .

b) Dla dodatniej wartości parametru  $p$  wyznaczonej w punkcie a) narysuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f$ ,  $g$ ,  $h$  i podaj współrzędne ich wspólnego punktu.

**2.140.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których wykresy funkcji liniowych  $f(x) = 1,25x - \frac{3k-2}{4}$  oraz  $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5-4k}{3}$  przecinają się w punkcie, którego współrzędne  $(x, y)$  spełniają warunek  $4x^2 - y^2 \leq 15$ .

**2.141.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dla których rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} a - 2x - y = 4 \\ -x - ay = 2 \end{cases}$  jest para liczb  $(x, y)$  taka, że  $x = y$ .

**2.142.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których wykresy funkcji liniowych  $f(x) = 2x - m + 8$  oraz  $g(x) = -4x - 5m - 4$  przecinają się w punkcie, którego współrzędne  $(x, y)$  spełniają warunek  $|y| - |x| \geq 5$ .

**2.143.** Dla jakich wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , wykresy funkcji liniowych  $f(x) = 5x + 2p + 3$  oraz  $g(x) = 3x - 6p - 21$  przecinają się w punkcie, którego współrzędne  $(x, y)$  spełniają nierówność  $x - 4 - 6 - y > 1$ ?

**2.144.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dla których rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} 2x - 3y = 3 - |a - 4| \\ 3x - 5y = 3a - 12 - 5 \end{cases}$  jest para liczb o przeciwnych znakach.

## Test sprawdzający do rozdziału 2.

1. Wartość wyrażenia  $\frac{\sqrt{3} - 2}{2} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$  jest równa
- A. -0.5      B.  $\frac{7 - 4\sqrt{3}}{2}$       C.  $2\sqrt{3} - \frac{7}{2}$       D. 0.5
2. Jeśli  $x \in (-6, 2)$ , to wyrażenie  $2x^2 - 4x - 3$  można zapisać w postaci
- A.  $x - 14$       B.  $x + 10$       C.  $5x - 14$       D.  $5x - 2$
3. Wiadomo, że  $a > 0 > b$ . Wobec tego wyrażenie  $b^2 - 3ab + 3b^2$  jest równe
- A.  $3b^2 - 10ab + 3b^2$       B.  $3(b^2 + b^2)$       C.  $-10ab$       D.  $10ab - 3(a^2 + b^2)$
4. Liczbą równoodległą od liczb  $\sqrt{2} - 2$  i  $\sqrt{2} + 5$  na osi liczbowej jest liczba
- A.  $2(\sqrt{2} - 1)$       B.  $5 - 4\sqrt{2}$       C.  $\sqrt{2} - 4$       D.  $\sqrt{2} - 2$
5. Odległość między liczbami  $\sqrt{5} + 2$  i  $\sqrt{5} - 17$  na osi liczbowej jest równa:
- A. 4      B. 19      C.  $2 + \sqrt{5}$       D. 18
6. Wskaż liczbę, która spełnia równanie  $|4 - 5x| = 2x + |x|$ .
- A. 1      B. 0      C. -1      D. 2
7. Wskaż równanie sprzeczne
- A.  $3 - x = 0$       B.  $x + 3 = 1 = 0$       C.  $7 - x = 3$       D.  $2 - x = 4$
8. Wskaż równanie, którego rozwiązaniami są liczby 8 i -12
- A.  $x + x = 10$       B.  $x + 2 = 6$       C.  $x^2 = 10$       D.  $2 - x = 6$
9. Zbiór  $(-\infty, 15)$  jest zbiorem rozwiązań nierówności
- A.  $|x - 3| \leq 18$       B.  $2x - 6 \leq 15$       C.  $x - 6 \leq 15$       D.  $x - 3 \leq 18$
10. Najmniejszą liczbą pierwszą należącą do zbioru rozwiązań nierówności  $|2 - x| \leq 1$  jest liczba:
- A. 1      B. 2      C. 3      D. 5

## Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. Oblicz wartość wyrażenia dla podanej obok wartości zmiennej:

a)  $|2 - a| + 4$  dla  $a = 0,3$

b)  $15 + |5 - b|$  dla  $b = 20$

12. Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{\sqrt{48} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{5} - 2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{5} - 2}$

13. Wykaż, że:

a)  $3\sqrt{5} - 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 35 - 30\sqrt{10} - 130$

b)  $\left| 0,75 - \log_2 81 + \log_2 128 \right| - \log_2 \left| 2,8 - 27 \frac{4}{5} \right| = 2$

14. Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie:

a)  $8 - |3 - x| - |2x - 4|$ , jeśli  $x \in (-2, 3)$

b)  $|3a - 1| - |1 - 3b| - 9|ab| - 1$ , jeśli  $a < 0$  i  $b < 0$

15. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a)  $|x - 4| = 5$

b)  $|2 - x| + 1 = 0$

c)  $|x - 3| = 0$

16. Korzystając z odległości na osi liczbowej rozwiąż równanie:

a)  $2|x + 7| = 6$

b)  $|x - 4| = 9$

17. Korzystając z odległości na osi liczbowej rozwiąż nierówność

a)  $x - 3 \leq 8$

b)  $1 - x \leq 13$

18. Rozwiąż graficznie

a) równanie  $2x + 5 = 6$

b) nierówność  $x + 2 \leq 5$

19. Rozwiąż algebraicznie nierówność

a)  $|2 - x| > 1$

b)  $x + 5 \leq 0$

c)  $x - 1 \leq 0$

d)  $x - 7 > 7$

20. Rozwiąż nierówność podwójną:

a)  $\frac{3x-14}{4} < x-3$

b)  $1-4 < x < 6$

21. Wyznacz zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$  oraz  $B - A$  wiedząc, że:

A - zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność  $|x-2| < 3$

B - zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność  $|x-4| < 2$

22. Wykaż, że jeśli  $x$  jest liczbą rzeczywistą ujemną, zaś  $y$  jest liczbą rzeczywistą dodatnią, to  $|4x-3| + (y-x) - 3|x-y| + y^2 = (2x-y)^2$

23. Wykaż, że jeśli  $x$  i  $y$  są liczbami rzeczywistymi ujemnymi, to

$$\frac{9|x-y| + 7x - 2y + 4y}{3} = 3y - 4xy$$

24. Rozwiąż

a) równanie  $\frac{x-7}{9} = \frac{7-x}{3}$

b) nierówność  $8-6|x-1| - |x+1| \geq 4-5|1+x|$

25. Rozwiąż równanie

a)  $\frac{3-x}{2} + \frac{5|x-3|}{4} = 1$

b)  $\frac{4-x-1}{3} + \frac{3+x}{2} = \frac{5x-1}{6} + \frac{6\sqrt{3}}{6}$

26. Rozwiąż nierówność

a)  $6-5\sqrt{8-x} \geq 2x-2\sqrt{2}-9\sqrt{2}$

b)  $\frac{5-2\sqrt{2-x}}{5} - \frac{1+\sqrt{x+2}}{2} < 0,3 - \frac{3\sqrt{x-2}+1}{5}$

27. Wyznacz liczbę  $p$  dla której jednym z rozwiązań równania  $|p-2-x| = 6$  z niewiadomą  $x$  jest liczba 7. Dla wyznaczonej liczby  $p$  wyznacz pozostałe rozwiązania tego równania.

28. Rozwiąż algebraicznie równanie

a)  $|2x-3| + |4x+8| = 0$

b)  $|1-(3x+2)| = 7$

c)  $2x-x+1=5$

d)  $2-x-5=x+3$

29. Rozwiąż algebraicznie nierówność

a)  $x-3-1 > 9$

b)  $7-x-x-1 < x-14$

30. Rozwiąż graficznie równanie

a)  $|3-2|x-1|| = 3$

b)  $\frac{2x+0}{3} = -4-2x+3$

31. Rozwiąż graficznie nierówność

a)  $2-x-3 \leq 1$

b)  $4-3x-x+4$

32. Wykaż, że jeśli  $y = 2x-1$ , to  $\sqrt{4x-y} + 4xy + 8x = \sqrt{4x-y} + 4xy + 12x$

33. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań równania ze względu na wartość parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$

a)  $(3k+2)x = 4-9k^2$

b)  $2(2x+3) = k^2(x-1) - 5k$

34. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$  dla których zbiór rozwiązań nierówności

a)  $\frac{3-2x}{5} \leq 2p-1$  jest przedziałem  $[3-x]$

b)  $\frac{5x-3p}{2} < \frac{2-7p}{3}$  zawiera się w przedziale  $[x, \frac{2-3p}{15}]$

35. Wyznacz wartość parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$  dla której zbiorem rozwiązań nierówności  $(3-(m+2))x + 2 - 3m > 0$  jest:

a) zbiór liczb rzeczywistych

b) zbiór pusty

36. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$  dla których równanie

a)  $(m+1)|5-4x| = m^2 - 1$  ma dwa rozwiązania dodatnie

b)  $|2x+4| - x = 3m+1$  ma dwa rozwiązania o różnych znakach

c)  $|x+1| - |x-3| = 2m+6$  ma nieskończenie wiele rozwiązań

37. Narysuj wykres funkcji  $y = g(k)$  która każdej wartości parametru  $k$  przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania  $|2(x-1)| - |x+2| = 5-k$

38. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań układu równań  $\begin{cases} 2x+3ay=4 \\ 2y=4-3ax \end{cases}$  ze względu na wartość parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . W przypadku istnienia rozwiązania wyznacz je

39. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  dla których wykresy funkcji liniowych  $f(x) = 2x+2-k$  oraz  $g(x) = -x-2k+2$  przecinają się w punkcie, którego współrzędne  $(x, y)$  spełniają warunek  $x-y < 2k+8$



# 3. Funkcja kwadratowa

## Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej z klasy 1

**3.1** Zapisz podany wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postać ogólną  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Następnie wypisz współczynniki  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

- a)  $f(x) = (x-1)(2x+3) - 4x$       b)  $f(x) = 5 - 2(x+4)^2$   
c)  $f(x) = -3(x-2)(2x+3) - 6$       d)  $f(x) = (1-2x)^2 + 4(x-1) + 3$

**3.2** Napisz wzór funkcji kwadratowej  $y = ax^2$  wiedząc, że do jej wykresu należy punkt

- a)  $A(3\sqrt{2}, 12)$       b)  $B(2, -4)$       c)  $C(-2, 8\sqrt{5})$

**3.3** Wyznacz współczynniki  $b$  i  $c$  we wzorze funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 + bx + c$  wiedząc, że do wykresu funkcji  $f$  należą punkty

- a)  $A(4, 9)$ ,  $B(-3, -12)$       b)  $A(-1, 6)$ ,  $B(4, -4)$

**3.4** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, jeśli do wykresu tej funkcji należą punkty

- a)  $A(-2, 9)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(4, 6)$       b)  $A(1, 6)$ ,  $B(-2, 3)$ ,  $C(0, 9)$

**3.5** Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, której wykres otrzymamy przesuwając równolegle wykres funkcji

- a)  $y = \frac{1}{3}x^2$  o 5 jednostek w lewo wzdłuż osi  $OX$   
b)  $y = -2x^2$  o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi  $OX$   
c)  $y = \frac{2}{5}x^2$  o 4 jednostki w górę wzdłuż osi  $OY$   
d)  $y = -x^2$  o 2 jednostki w dół wzdłuż osi  $OY$

**3.6** Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc, że jej wykres otrzymamy przesuwając równolegle wykres funkcji  $y = \frac{1}{4}x^2$

- a) o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi  $OX$  i o 3 jednostki w dół wzdłuż osi  $OY$   
b) o 1 jednostkę w lewo wzdłuż osi  $OX$  i o 5 jednostek w dół wzdłuż osi  $OY$   
c) o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi  $OX$  i o 4 jednostki w górę wzdłuż osi  $OY$   
d) o 5 jednostek w prawo wzdłuż osi  $OX$  i o 2 jednostki w górę wzdłuż osi  $OY$

**3.7** Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$  oraz współrzędne punktu wspólnego paraboli i osi  $OY$ . Narysuj wykres tej funkcji.

- a)  $f(x) = (x-3)^2$       b)  $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$       c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$   
d)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$       e)  $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2$       f)  $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - 1$

**3.8** Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Podaj zbiór wartości funkcji  $f$ , maksymalne przedziały monotoniczności tej funkcji, równanie osi symetrii jej wykresu.

- a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$       b)  $f(x) = x^2 - 5$       c)  $f(x) = \frac{2}{3}(x+4)^2$   
d)  $f(x) = -2(x-2)^2 + 7$       e)  $f(x) = \frac{1}{4}(x+5)^2 - 3$       f)  $f(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 4$

**3.9** Dany jest wierzchołek  $W$  paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f$  oraz punkt  $A$  należący do tej paraboli. Wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej, a następnie doprowadź go do postaci ogólnej.

- a)  $W(2, 0)$ ,  $A(5, -3)$       b)  $W(3, 1)$ ,  $A(1, 2)$   
c)  $W(-1, 3)$ ,  $A(0, 1)$       d)  $W\left(2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{8}\right)$ ,  $A(5, 0)$   
e)  $W(-1, -1)$ ,  $A(2, -4)$       f)  $W(-4, 0)$ ,  $A\left(-7, 1\frac{4}{5}\right)$

**3.10** Wykres funkcji kwadratowej  $f$  jest symetryczny względem prostej  $x + 3 = 0$  i przecina oś  $OY$  w punkcie o rzędnej 10. Podaj argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość 10.

**3.11** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci kanonicznej, wiedząc, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział  $(-\infty, 4]$  oraz dla argumentów  $-2$  i  $8$  funkcja przyjmuje tę samą wartość, równą 1.

**3.12** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej wiedząc, że funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziale  $(-1; +\infty)$  i malejąca w przedziale  $(-\infty; 1)$ , zbiorem wartości tej funkcji jest przedział  $(-2; +\infty)$ , a jej wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych.

**3.13** Funkcja kwadratowa  $f$  dla argumentu  $-3$  przyjmuje najmniejszą wartość równą  $5$ . Wiedząc, że do wykresu tej funkcji należy punkt  $A(-2; 10)$ , wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.

**3.14** Funkcja kwadratowa  $f$  dla argumentu  $2$  przyjmuje największą wartość równą  $4$ . Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej wiedząc, że jej wykres przecina oś  $OY$  w punkcie o rzędnej  $1$ .

**3.15** Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 - kx + 1$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ . Wykaz, że dla każdej liczby całkowitej  $k$

- a) różnica  $f(k) - f(k-1)$  jest liczbą całkowitą nieparzystą
- b) różnica  $f(k+3) - f(k+1)$  jest liczbą podzielną przez  $4$ .

**3.16** Wyznacz równanie prostej, do której należą wierzchołki parabol, będących wykresami funkcji kwadratowych, opisanych wzorem:

- a)  $f(x) = (x-3)^2 + m, m \in \mathbb{R}$
- b)  $f(x) = 5(x-m)^2 + m, m \in \mathbb{R}$
- c)  $f(x) = 2(x-m)^2 - 4, m \in \mathbb{R}$
- d)  $f(x) = \frac{1}{2}(x-m)^2 + 2m, m \in \mathbb{R}$

**Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej**

**3.17** Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Sprowadź ten wzór do postaci ogólnej.

- a)  $f(x) = 4(x-3)^2 - 20$
- b)  $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 6$
- c)  $f(x) = 5(x-1)^2 + 1$

**3.18** Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej. Sprowadź ten wzór do postaci kanonicznej, stosując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy lub kwadrat różnicy

- a)  $f(x) = x^2 - 2x$
- b)  $f(x) = 2x^2 + 6x + 1$
- c)  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$
- d)  $f(x) = 3x^2 - 24x + 50$
- e)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$
- f)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$

**3.19** Oblicz wyróżnik funkcji kwadratowej  $f$  jeśli:

- a)  $f(x) = 3x^2 + 6x - 3$
- b)  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 7x$
- c)  $f(x) = 1 - 4x - 1 + 4x$
- d)  $f(x) = 3(x-1)^2 + 1$
- e)  $f(x) = (3x-2)^2$
- f)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6(x-4)$

**3.20** Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f$  stosując poznane wzory. Napisz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.

- a)  $f(x) = 2x^2 - 3x$
- b)  $f(x) = x^2 - 4$
- c)  $f(x) = x^2 + 10x - 25$
- d)  $f(x) = x^2 - 6x + 5$
- e)  $f(x) = 4x^2 - x + 1$
- f)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

**3.21** Prosta  $k$  jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f$ . Oblicz współczynnik  $b$  we wzorze tej funkcji.

- a)  $f(x) = 4x^2 - bx + 2, k: x = 0$
- b)  $f(x) = -x^2 + bx + 12, k: x = 5$
- c)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + bx - 1, k: x = -3$
- d)  $f(x) = -5x^2 + bx - 4, k: x = -\frac{1}{2}$

**3.22** Dany jest wyróżnik funkcji kwadratowej  $y = ax^2 + bx + c$  wierzchołek  $W$  paraboli, będącej wykresem tej funkcji. Wyznacz współczynniki  $a, b, c$ .

- a)  $\Delta = 12, W(4; 3)$
- b)  $\Delta = -8, W(\frac{1}{2}; 1)$
- c)  $\Delta = 120, W(0; 5)$
- d)  $\Delta = 36, W(-1; 3)$
- e)  $\Delta = -48, W(2; -3)$
- f)  $\Delta = -1, W(\frac{3}{10}; \frac{1}{20})$

**3.23** Oblicz współczynnik  $a$  we wzorze funkcji kwadratowej  $f$  oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji  $f$  i osi  $OY$ .

- a)  $f(x) = a(x+2)^2 - 7, \Delta = -84$
- b)  $f(x) = ax^2 - 3, \Delta = 24$
- c)  $f(x) = a(x-3)^2 + 5, \Delta = -10$
- d)  $f(x) = a(4-x)^2 - 2, \Delta = -8$
- e)  $f(x) = a(-5-x)^2 - 1, \Delta = \frac{4}{5}$
- f)  $f(x) = a(-x-1)^2 - 6, \Delta = 12a$

**3.24** Doprowadź wzór funkcji kwadratowej  $f$  do postaci kanonicznej. Podaj współrzędne punktu przecięcia parabol będącej wykresem funkcji  $f$  z osią  $OY$ , współrzędne punktu  $A$ , symetrycznego do niego względem osi symetrii tej paraboli. Narysuj wykres funkcji  $f$ .

- a)  $f(x) = x^2 - 6x + 5$
- b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x - 7$

c)  $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$

d)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 6$

e)  $f(x) = 2x^2 - 6x$

f)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$

3.25. Wyznacz zbiór wartości funkcji kwadratowej  $f$  nie szkicując jej wykresu.

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 10x + 50$

b)  $f(x) = -8x^2 + 7$

c)  $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 2x + 3$

d)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$

3.26. Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji kwadratowej  $f$  nie szkicując jej wykresu.

a)  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x - 4$

b)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5x - 25$

c)  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 9x$

d)  $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - 12x + 19$

3.27. Ile jest takich funkcji kwadratowych, których zbiorem wartości jest przedział  $[4, +\infty)$ , wyróżnik jest równy 16, a wykres przecina oś  $OY$  w punkcie  $A(0, 5)$ ?

a) Podaj wzory tych funkcji w postaci kanonicznej.

b) Naszkicuj wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych.

c) Podaj równanie proste, względem której wykresy tych funkcji są symetryczne.

## Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

3.28. Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $y = a(x - p)^2 + q$ ,  $a \neq 0$ . Podaj, na podstawie wartości  $a$ ,  $p$ ,  $q$ , liczbę miejsc zerowych tej funkcji.

a)  $y = 3(x - 1)^2 + 4$

b)  $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 5$

c)  $y = (x + 8)^2 - 2$

d)  $y = \frac{1}{4}(x - 4)^2 + 1$

e)  $y = (x + 5)^2$

f)  $y = 2(x - 1)^2 - 6$

3.29. Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci kanonicznej. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$

b)  $f(x) = 2(x - 3)$

c)  $f(x) = 9x^2 - 81$

d)  $f(x) = (x + 2)^2 - 36$

e)  $f(x) = (x - 1)^2 + 5$

f)  $f(x) = 2(x - 1)^2 + 8$

3.30. Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci kanonicznej. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a)  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)^2 - 8$

b)  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1$

c)  $f(x) = 3(x - 7)^2 - 27$

d)  $f(x) = 100x^2 - 25$

e)  $f(x) = (x - 4)^2$

f)  $f(x) = 2 - 2x^2$

3.31. Podaj miejsca zerowe funkcji.

a)  $y = x + 2$ ,  $x \in \mathbb{Z}$

b)  $y = 3(2x - 8)x$

c)  $y = 4(x + 5)^2$

d)  $y = (x - 8)(x\sqrt{3} + \sqrt{6})$

e)  $y = (2 - 2x)(x - 3)$

f)  $y = 3(4 - x + \sqrt{2})$

3.32. Dany jest wzór funkcji kwadratowej. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a)  $y = 4x^2 - 8x$

b)  $y = 20 - 4x^2$

c)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 12x$

d)  $y = x^2 + 10x + 25$

e)  $y = \frac{4}{5}x^2 - 5$

f)  $y = -x^2 + 2x - 1$

3.33. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej  $f$ , o ile istnieją, jeśli.

a)  $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

b)  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

c)  $f(x) = (5x - 4)^2$

d)  $f(x) = (x + 1)^2 - 9$

e)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8x - 32$

f)  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$

3.34. Oceń na podstawie wartości wyróżnika, ile miejsc zerowych ma funkcja kwadratowa.

a)  $y = 3x^2 + 9x + 1$

b)  $y = 2x^2 - 6x - 7$

c)  $y = 9x^2 + 12x + 4$

d)  $y = 2\sqrt{2}x^2 - 4x + \sqrt{2}$

e)  $y = 2x^2 - \sqrt{3}x - 1$

f)  $y = 9x^2 + x - 16$

**3.35.** Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej. Oblicz wyróżnik, wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a)  $y = 2x^2 - 8x + 10$     b)  $y = 3x^2 - 2x - 1$     c)  $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x - 8$

d)  $y = x^2 + 2x + 6$     e)  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 4$     f)  $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$

**3.36.** Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej. Oblicz wyróżnik, wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a)  $f(x) = x^2 + 5x - 4$     b)  $f(x) = 2x^2 - 3x$     c)  $f(x) = 4x^2 - 1$

d)  $f(x) = 3x^2 + 7x + 4$     e)  $f(x) = 0,5x^2 - 6x + 8$     f)  $f(x) = 2x^2 - 10x + 3$

**3.37.** Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci iloczynowej. Podaj wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

a)  $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)(x+10)$     b)  $f(x) = 8x(x-12)$

c)  $f(x) = \frac{3}{5}(x+5)^2$     d)  $f(x) = 5(x+3)(x-8)$

e)  $f(x) = -2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$     f)  $f(x) = -(x-4)(x-4)$

**3.38.** Dany jest współczynnik  $a$  i miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Zapisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

a)  $a = \sqrt{2}$ ,  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$     b)  $a = 3$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$

c)  $a = \frac{4}{3}$ ,  $x_1 = 7$     d)  $a = \frac{1}{3}$ ,  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 8$

e)  $a = 7$ ,  $x_1 = 2$     f)  $a = \frac{2}{3}$ ,  $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ ,  $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

**3.39.** Zapisz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci iloczynowej, o ile istnieje.

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$     b)  $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 16x$

c)  $f(x) = -2x^2 + 3x - 7$     d)  $f(x) = -4x^2 + 40x - 36$

e)  $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + 2$     f)  $f(x) = \frac{5}{7}x^2 - 2\frac{6}{7}x - 15$

**3.40.** Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci iloczynowej. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = 5(x-6)(x+4)$

b)  $f(x) = \frac{1}{2}(x-8)(x+8)$

c)  $f(x) = 4x(x+10)$

d)  $f(x) = -\frac{1}{3}(x-9)(x-3)$

**3.41.** Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci iloczynowej. Podaj wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.

a)  $f(x) = (x-1)(x+5)$

b)  $f(x) = 2\sqrt{3}x(x+4)$

c)  $f(x) = 2(x-\sqrt{6})^2$

d)  $f(x) = -\frac{1}{2}(x+6)(x-6)$

e)  $f(x) = \frac{3}{5}(x-1)(x+5)$

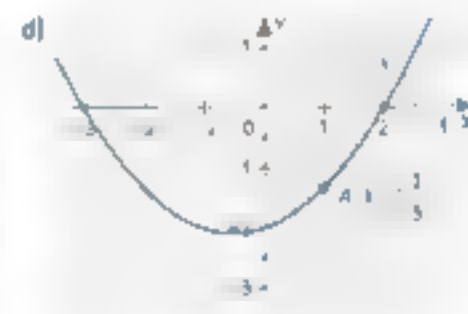
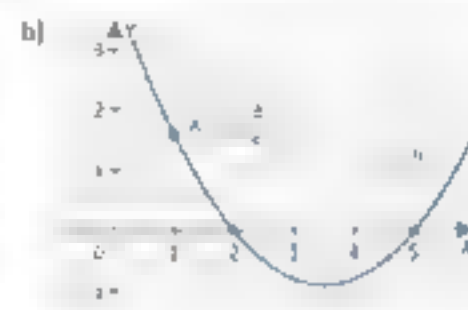
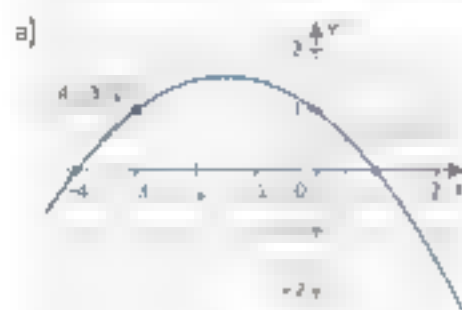
f)  $f(x) = \frac{2}{3}(x-3)(x-4)$

**3.42.** Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci kanonicznej. Sprawdz wzór tej funkcji do postaci iloczynowej, o ile istnieje.

a)  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $-4$     b)  $f(x) = 1(x-3)^2 + 9$     c)  $f(x) = 4(x-5)^2 - 16$

d)  $f(x) = 9(x+2)^2 + 36$     e)  $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$     f)  $f(x) = \frac{1}{2}(x+7)^2 - 1$

**3.43.** Na podstawie danych punktów wyróżnionych na wykresie funkcji kwadratowej  $f$  wyznacz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej. Następnie podaj jej wzór w postaci ogólnej i w postaci kanonicznej.





**D 3.44** Wykaż, że dla dowolnej liczby  $a$  różnej od 0 i dowolnej liczby rzeczywistej  $c$  funkcja kwadratowa  $f(x) = ax^2 + (a - c)x + c$  ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

**D 3.45** Wykaż, że jeśli suma wszystkich współczynników we wzorze funkcji  $f(x) = ax^2 + bx + c$  jest równa zero, to funkcja ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

**D 3.46** Wykaż, że jeśli  $0 < \Delta$  i 1. to funkcja kwadratowa  $f(x) = (a - 1)x^2 + 2ax + a + 1$  ma dwa miejsca zerowe, z których jedno jest równe  $-1$ .

**3.47** Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = mx^2 + (2m + 1)x + m + 3$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . (D)

a) Dla  $m = -1$  zapisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

b) Dla  $m = \frac{1}{8}$  zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci ogólnej, w postaci kanonicznej.

**D c)** Wykaż, że funkcja  $f$  ma miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{8}$ .

**D 3.48** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $k$  funkcja kwadratowa  $f(x) = 2x^2 + (k - 1)x + \frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{4}k$  ma dwa miejsca zerowe. Następnie wyznacz wartość  $k$ , dla której suma miejsc zerowych funkcji  $f$  jest mniejsza od 9.

## Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu

**3.49** Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej  $f$  omów własności tej funkcji poprzez odpowiedzi na następujące pytania.

- 1) Jaka jest dziedzina funkcji?
- 2) Jaki jest zbiór wartości funkcji?
- 3) Czy funkcja  $f$  ma miejsca zerowe? Jeśli tak, to jakie?
- 4) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne?
- 5) W jakich przedziałach funkcja jest rosnąca, a w jakich malejąca?
- 6) Czy funkcja przyjmuje wartość największą, czy najmniejszą? Jeśli tak, to dla jakiego argumentu?

a)  $f(x) = x^2 - 1$       b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$       c)  $f(x) = 3x^2 - 6x$   
 d)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$       e)  $f(x) = -x^2 + 2x - 2$       f)  $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

**3.50** Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej  $f$  omów jej własności jeśli:

a)  $f(x) = 2x^2 - 1(x + 1)$

b)  $f(x) = (x - 1)(x - 5)$

c)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

d)  $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 4,5$

e)  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2$

f)  $f(x) = -2x(x - 2)$

**3.51** Naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f$  i  $g$ . Następnie rozwiąż graficznie równanie  $f(x) = g(x)$ .

a)  $f(x) = (x + 2)^2$ ,  $g(x) = 1$

b)  $f(x) = -(x - 1)^2 - 1$ ,  $g(x) = -5$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4(x + 2)$ ,  $g(x) = x - 2$       d)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$ ,  $g(x) = x - 1$

**3.52** Naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykres funkcji kwadratowej  $f$  i wykres funkcji liniowej  $g$ . Następnie rozwiąż graficznie nierówność podaną obok wzorów funkcji  $f$  i  $g$ .

a)  $f(x) = -x^2 - 5x - 6$ ,  $g(x) = x + 1$ ,  $f(x) > g(x)$

b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$ ,  $g(x) = 2x - 3$ ,  $f(x) > g(x)$

c)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 3\frac{1}{4}$ ,  $g(x) = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{4}$ ,  $f(x) < g(x)$

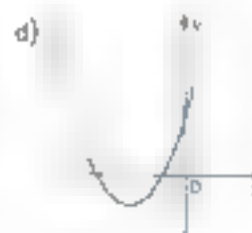
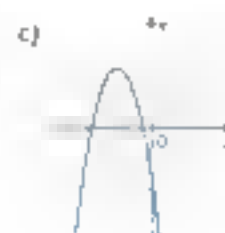
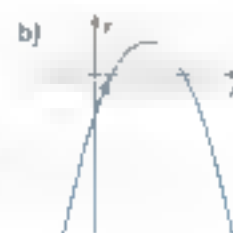
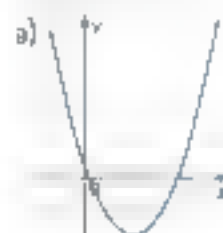
**3.53** Naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji kwadratowych  $f$  i  $g$ . Następnie rozwiąż graficznie nierówność podaną obok wzorów tych funkcji.

a)  $f(x) = -x^2 - 4x$ ,  $g(x) = x^2 + 2x + 4$ ,  $g(x) \geq f(x)$

b)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 2$ ,  $g(x) = x^2 + 4x + 3$ ,  $f(x) < g(x)$

c)  $f(x) = x^2 - 3x - 4$ ,  $g(x) = x^2 + 3x - 4$ ,  $f(x) \geq g(x)$

**3.54** Ustal znak współczynników  $a$ ,  $b$ ,  $c$  we wzorze funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$  na podstawie szkicu wykresu tej funkcji w układzie współrzędnych.



3.55. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{jeśli } x \in (-\infty, 3) \\ x - 6 & \text{jeśli } x \in [3, +\infty) \end{cases}$  na jego podstawie

stawie

- wyznacz przedziały, w których funkcja  $f$  jest malejąca
- podaj miejsca zerowe tej funkcji
- odczytaj zbiór, w którym funkcja przyjmuje wartości ujemne.

3.56. Dana jest funkcja  $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 8x - 6, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ 6, & \text{jeśli } x \in [0, +\infty) \end{cases}$

- Narysuj wykres funkcji  $f$ .
- Podaj zbiór wartości funkcji  $f$ .
- Oblicz wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $-4$ .
- Dla jakich argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartości nieujemne?

3.57. Narysuj wykres funkcji  $f$  i omów jej własności, jeśli

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{4} & \text{jeśli } x \in (-\infty, 1) \\ x^2 - 6x + 8, & \text{jeśli } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4, & \text{jeśli } x \in (2, 8) \\ -4, & \text{jeśli } x \in [8, +\infty) \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 5 & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ x - 6x + 5, & \text{jeśli } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -x^2 - 10x - 21, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -4) \\ -\frac{3}{4}x, & \text{jeśli } x \in [-4, 0) \\ 0,75x^2 - 3x, & \text{jeśli } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

3.58. Dana jest funkcja  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & \text{jeśli } x \in (-4, 2) \\ \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} & \text{jeśli } x \in [2, +\infty) \end{cases}$

- Narysuj wykres funkcji  $f$ .
- Podaj zbiór wartości tej funkcji.
- Podaj przedziały monotoniczności funkcji  $f$ .
- Określ znak iloczynu  $f(-2\pi) \cdot f(\sqrt{2} + 1)$ .

## Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności

3.59. Wyznacz współczynniki  $b$  i  $c$  we wzorze funkcji kwadratowej

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + c \text{ wiedząc, że funkcja } f \text{ ma tylko jedno miejsce zerowe oraz } f(-4) = f(8).$$

3.60. Wyznacz współczynniki  $b$  i  $c$  we wzorze funkcji kwadratowej

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + bx + c \text{ wiedząc, że miejscami zerowymi funkcji } f \text{ są liczby } 9 \text{ oraz } -6$$

3.61. Funkcja kwadratowa  $f(x) = 2x^2 + bx + c$  jest osnąca w przedziale  $(-\infty, 1)$  malejąca w przedziale  $(1, +\infty)$ . Wiedząc że  $f(3) = 25$ , oblicz współczynniki  $b$  i  $c$ .

3.62. Funkcja kwadratowa  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$  ma jedno miejsce zerowe, a jej wykres przecina oś  $OY$  w punkcie  $P(0, -8)$ . Wyznacz wartości współczynników  $b$  i  $c$ .

3.63. Ośią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = 3x^2 + bx + c$  jest prosta o równaniu  $x = 2$ . Wiedząc że najmniejsza wartość funkcji  $f$  jest równa  $-4$ , oblicz współczynniki  $b$  i  $c$ .

3.64. Napisz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej, wiedząc, że przyjmuje ona wartość dodatnią wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \in (-8, 2)$  a największa wartość tej funkcji jest równa  $2\frac{1}{6}$ .

**3.65** Napisz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej, jeśli wiadomo, że funkcja ta przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \in (-2; 3 \cup +\infty)$ , a do jej wykresu należy punkt  $A(1, 12)$ .

**3.66** Napisz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej, wiedząc, że do wykresu tej funkcji należy punkt  $P(-1, 1)$ , zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $(-\infty, 4]$ , a maksymalny przedział, w którym funkcja  $f$  jest malejąca, to  $[-2, +\infty)$ .

**3.67** Napisz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej, wiedząc, że dla argumentu 3 funkcja  $f$  przyjmuje najmniejszą wartość równą 2, a jednym z miejsc zerowych tej funkcji jest liczba 1.

**3.68** Funkcja kwadratowa  $f$  ma tylko jedno miejsce zerowe. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej, wiedząc, że prosta o równaniu  $x - 5 = 0$  jest osią symetrii wykresu tej funkcji, a punkt  $A(2, -1\frac{4}{5})$  należy do tego wykresu.

**3.69** Zbiorem wartości funkcji kwadratowej  $f$  jest przedział  $[-2, +\infty)$ . Wykres funkcji  $f$  przecina oś  $OY$  w punkcie o rzędnej 30. Napisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej, wiedząc, że suma jej miejsc zerowych jest równa 16.

**3.70** Zbiorem wartości funkcji kwadratowej  $f$  jest przedział  $[-\infty, 162]$ . Wykres funkcji  $f$  przecina oś  $OY$  w punkcie  $B(0, 90)$ , a osią symetrii tego wykresu jest prosta o równaniu  $x = 6$ . Napisz wzór funkcji  $f$  w postaci ogólnej.

**3.71** Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $f$  jest liczba 4, a najmniejsza wartość tej funkcji jest równa  $-144,5$ . Napisz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej, wiedząc, że maksymalny przedział, w którym funkcja jest rosnąca, to  $(-13, +\infty)$ .

**3.72** Punkt  $A(-6, 8)$  należy do wykresu tej funkcji kwadratowej  $f$ . Wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaci ogólnej, wiedząc, że  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

**3.73** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci iloczynowej, wiedząc, że prosta o równaniu  $y = 90$  przecina wykres tej funkcji w punktach o odległościach 5 oraz 1, zaś największa wartość tej funkcji jest równa 98.

**3.74** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci iloczynowej, wiedząc, że suma jej miejsc zerowych jest równa 3, zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $[-\frac{3}{4}, +\infty)$ , a wykres tej funkcji przecina oś  $OY$  w punkcie o rzędnej  $-\frac{6}{5}$ .

**3.75** Funkcja kwadratowa  $f$  przyjmuje wartości nie większe od 18 wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$ . Wyznacz wzór tej funkcji w postaci ogólnej, wiedząc, że wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji należy do prostej o równaniu  $y = 24$ .

**3.76** Funkcja kwadratowa  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , dla argumentu 3 przyjmuje najmniejszą wartość, równą 8. Wyznacz wartości współczynników  $a$  i  $b$ .

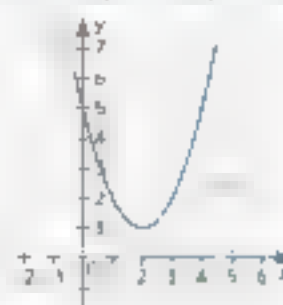
**3.77** Średnia arytmetyczna miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , jest równa 3. Rzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$  wynosi 36. Wyznacz wartości współczynników  $a$  i  $b$ .

**3.78** Funkcja kwadratowa  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ma dwa miejsca zerowe 2 oraz 3. Wyznacz wartości współczynników  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , wiedząc, że ich suma jest równa  $-\frac{4}{3}$ .

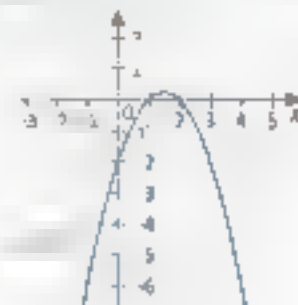
## Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

**3.79.** Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej  $f$ . Odczytaj z wykresu najmniejszą oraz największą wartość funkcji  $f$  w podanym przedziale.

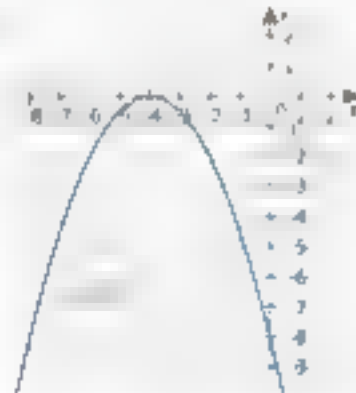
a)  $[-4, 4]$



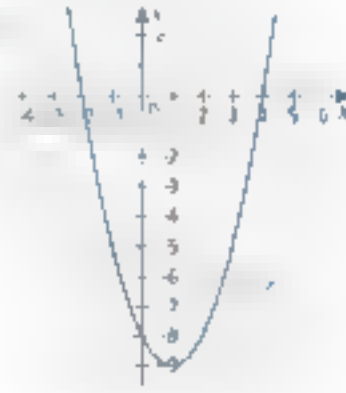
b)  $[3, 4]$



c)  $[-4, 2]$



d)  $[0, 1]$



**3.80.** Narysuj wykres funkcji  $f$ . Odczytaj z wykresu najmniejszą oraz największą wartość funkcji  $f$  w podanym przedziale, jeśli:

a)  $f(x) = x^2 + 2x + 5, x \in [0, 3]$       b)  $f(x) = 1 - \frac{3}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x, x \in [1, 0]$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2, x \in (2, 4)$       d)  $f(x) = -\frac{1}{2}x(x+2), x \in (-4, -2)$

**3.81.** Nie szkicując wykresu funkcji kwadratowej, oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  w podanym przedziale, jeśli:

a)  $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 + 2, x \in (0, 3)$       b)  $f(x) = -\frac{3}{4}(x-1)^2 + 5, x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

c)  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 5, x \in [2, 1]$       d)  $f(x) = \sqrt{3}x + 2)(x+8), x \in [2, 1]$

e)  $f(x) = \frac{1}{4}(x-5)(x+5), x \in [-1, \sqrt{2}]$       f)  $f(x) = \frac{1}{5}(x-4)^2 + 9, x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

**3.82.** Funkcja kwadratowa  $f$  opisana jest wzorem  $f(x) = -3x^2 - 12x - 96$ .

a) Czy funkcja  $f$  ma wartość najmniejszą, czy największą? Ile ta wartość wynosi i dla jakiego argumentu jest przyjmowana?

b) Bez obliczania wartości funkcji uzasadnij, że  $f(-3) < f(-\sqrt{3})$ .

c) Oblicz największą oraz najmniejszą wartość tej funkcji w przedziale  $[-4, 3]$ .

**3.83.** Funkcja kwadratowa  $f$  ma następujące własności:  $f(3) = 0$  oraz  $f(-1) = f(5) = 3$ .

a) Czy funkcja kwadratowa ma wartość najmniejszą, czy największą? Dla jakiego argumentu ta wartość jest przyjmowana?

b) Podaj najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  w przedziale  $[-5, 7]$ .

**3.84.** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej wiedząc, że w przedziale  $[-2, 2]$  funkcja  $f$  przyjmuje największą wartość równą 5, a jej wykresem jest parabola o wierzchołku  $W(3, 2)$ .

**3.85.** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej wiedząc, że funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \in (-2, 4)$ , a największa wartość funkcji  $f$  w przedziale  $(3, 6)$  jest równa 4.

**3.86.** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej wiedząc, że jej zbiorem wartości jest przedział  $[-\infty, 6]$ , największa wartość funkcji  $f$  w przedziale

$[-7, 5]$  jest równa 4, a osią symetrii wykresu (czyli funkcji) jest prosta o równaniu  $x + 3 = 0$ .

**3.87.** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej wiedząc, że jej miejscami zerowymi są liczby  $x = 3$  i  $x = -1$ , a najmniejsza wartość funkcji  $f$  w przedziale  $[-2, 0]$  jest równa -8.

**3.88.** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej wiedząc, że funkcja  $f$  ma tylko jedno miejsce zerowe  $f(2) = f(10)$  oraz największa wartość funkcji  $f$  w przedziale  $(8, 9)$  jest równa -2.

**3.89.** Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $f$  jest liczba 2, a największa wartość funkcji  $f$  w przedziale  $[-10, 2]$  jest równa 10. Wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaci ogólnej wiedząc, że jej wykres jest symetryczny względem prostej o równaniu  $x = 5$ .

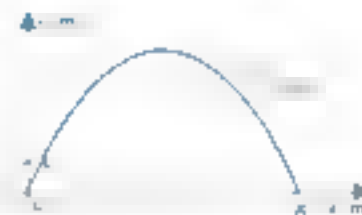
**3.90.** Największa wartość funkcji kwadratowej  $f$  w przedziale  $[-3, 0]$  jest równa 4, a najmniejsza wartość w tym przedziale jest równa 1. Wyznacz wzór tej funkcji w postaci ogólnej wiedząc, że maksymalny przedział, w którym funkcja  $f$  jest rosnąca, to  $(-\infty, 2]$ .

**3.91.** Największa wartość funkcji kwadratowej  $f$  w przedziale  $[-5, 4]$  jest równa -4. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej wiedząc, że maksymalny przedział, w którym funkcja jest malejąca to  $[-1, \infty)$ , oraz  $f(1) = -4$ .

**3.92.** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci ogólnej wiedząc, że w przedziale  $[-5, 3]$  funkcja  $f$  przyjmuje największą wartość równą 3 oraz  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ .

## Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne

**3.93.** Tor lotu piłki przedstawiony na rysunku obok, opisuje wzór  $h(x) = -0,25x^2 + 2x$ , gdzie  $x \in (0, 8)$ . Na jaką maksymalną wysokość wzniosła się piłka?



**3.94.** Funkcja  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 21}{2}$  opisuje wydajność pracy robotnika w zależności od czasu pracy  $x$  w ciągu 8 godzinnego dnia pracy. Robotnik rozpoczyna pracę o godzinie 7<sup>00</sup>. O której godzinie jego wydajność jest największa?

Ści od czasu pracy  $x$  w ciągu 8 godzinnego dnia pracy. Robotnik rozpoczyna pracę o godzinie 7<sup>00</sup>. O której godzinie jego wydajność jest największa?



**3.95.** Pewne ciało w czasie  $t$  s przebyło drogę  $S$  m, którą opisuje wzór  $S(t) = t^2 + 5t + 8$ , gdzie  $t \in (1, 5)$ . Oblicz:

- długość drogi przebytej przez to ciało w ciągu czterech sekund
- średnią prędkość ciała.

**3.96.** Rzucano kamień z prędkością początkową 10 m/s pionowo do góry. Wysokość  $S$  m, jaką osiągnie kamień po  $t$  sekundach, określona jest w przybliżeniu funkcją  $S(t) = 10t - 5t^2$ . Jaką maksymalną wysokość osiągnie ten kamień?

**3.97.** Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy takich dwóch liczb, których suma kwadratów jest najmniejsza.

**3.98.** Liczbę 30 przedstaw w postaci różnicy takich dwóch liczb, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

**3.99.** Liczbę 18 przedstaw w postaci sumy dwóch takich składników, aby suma ich sześciątów była najmniejsza.

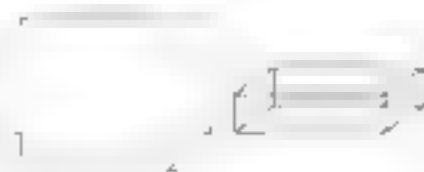
**3.100.** Większa część uczniów klasy liczącej 31 osób zachorowała na gripę. Z dwóch uczniów postanowili wystać chorym kolegom kartki z pozdrowieniami. Wiedząc, że każdy zdrowy uczeń wystać do każdego chorego kolegi kartkę, oraz że liczba wysłanych kartek była największa z możliwych, oblicz, ile uczniów zachorowało na gripę.

**3.101.** Krótszy bok prostokąta o wymiarach 5 cm  $\times$  8 cm zwiększamy o  $x$  cm, a dłuższy bok zmniejszamy o  $x$  cm.

- Wyznacz wzór funkcji opisującej pole nowego prostokąta w zależności od  $x$ ; podaj dziedzinę tej funkcji.
- Dla jakiej długości  $x$  pole otrzymanego prostokąta jest największe? Oblicz to pole.

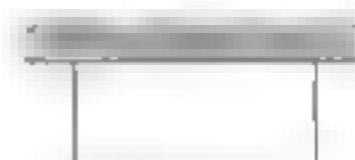
**3.102.** Z prostokątnego arkusza tektury o wymiarach 20 cm  $\times$  30 cm odcięto w rogach kwadraty, których bok mają długość  $x$  cm. Następnie po zagięciu powstałych brzegów zbudowano prostopadłościenne (otwarte) pudełko, jak na rysunku poniżej.

- Wyznacz wzór funkcji opisującej pole powierzchni bocznej tego pudełka w zależności od długości boku wyciętego kwadratu; podaj dziedzinę tej funkcji.
- Dla jakiej długości  $x$  pole powierzchni bocznej pudełka jest największe z możliwych? Oblicz to pole.



**3.103.** Suma długości podstawy trójkąta i wysokości opuszczonej na tę podstawę wynosi 30 cm. Wyznacz długość podstawy tak, aby pole trójkąta było największe.

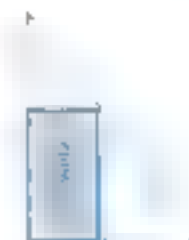
**3.104.** Właściciel gospodarstwa agroturystycznego chce wygrodzić w ogrodzie prostokątny plac zabaw dla dzieci. Dysponuje płotem długości 84 m, a powle zchnia placu ma być możliwie największa. Wyznacz wymiary tego placu zabaw i oblicz jego powierzchnię (w arach).



**3.105.** Gospodarz chce siatką o długości 12 m wygrodzić na podwórku prostokątny wybieg dla psa, przylegający jednym bokiem do budynku. Jakie wymiary powinien mieć ten wybieg, aby jego pole powierzchni było największe? Oblicz powierzchnię tego największego wybiegu.

**3.106.** Strona książki ma obwód 58 cm. Oblicz, jakie wymiary powinna mieć strona tej książki, aby zapewnić maksymalną powierzchnię druku, jeśli założymy, że marginesy boczne i dolny będą jednocentymetrowe, zaś margines górny dwucentymetrowy.

**3.107.** Z kawałka płótna w kształcie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 2 m i 1,5 m hałczarka chce wyciąć prostokątną serwetkę w sposób przedstawiony na rysunku obok. Jakie powinny być wymiary serwetki, aby jej pole było największe?

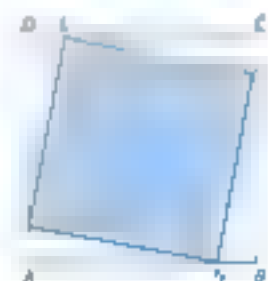


**3.108.** Z kawałka płótna w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie 4 m i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej 3 m hałczarka chce wyciąć prostokątny obrus w sposób przedstawiony na rysunku obok. Jakie powinny być wymiary obrusa, aby jego powierzchnia była największa?



**3.109.** Na bokach kwadratu o polu 16 cm<sup>2</sup> zaznaczamy punkty  $K, L, M, N$  tak, że  $|AK| = |DL| = |CM| = |BN|$ , jak na rysunku obok.

- Oznacz literą  $x$  długość odcinków  $AK, DL, CM$  oraz  $BN$ . Napisz wzór funkcji pola czworokąta  $KLMN$  w zależności od  $x$ . Określ dziedzinę tej funkcji.
- Jak należy wybrać punkty  $K, L, M, N$ , aby pole czworokąta  $KLMN$  było najmniejsze?



**3.110.** Właściciel sklepu kupuje aparaty fotograficzne, płacąc producentowi 1200 zł za sztukę. Następnie sprzedaje miesięcznie 40 sztuk takich aparatów po 1800 zł za sztukę. Sprzedawca ostrzegał, że każda obniżka ceny aparatu o 10 zł w jego sklepie zwiększy liczbę sprzedanych aparatów o jedną sztukę. Jaką powinien ustalić cenę, aby jego miesięczny zysk był największy?

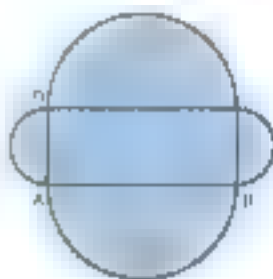
**3.111.** Firma ma 180 lokali użytkowych i zajmuje się wynajmem tych lokali na działalność usługową. Obecnie wszystkie lokale są wynajęte, a miesięczna opłata za wynajem każdego lokalu wynosi 1200 zł. Firma postanowiła zoptymalizować swój miesięczny zysk i wprowadzić podwyżkę. W tym celu ostrzegano, że każda podwyżka ceny o 40 zł spowoduje zmniejszenie o 5 liczby wynajmowanych pomieszczeń. Jaką miesięczną cenę wynajmu każdego lokalu powinna ustalić ta firma, aby jej zysk był największy? Ile wynosi ten największy miesięczny zysk?

**3.112.** Hotel ma 60 pokoi. Opłata za dobę hotelową w każdym pokoju wynosi 320 zł. Właściciel hotelu udziela specjalnej zniżki firmom rezerwującym więcej niż 30 pokoi. Wówczas dobową opłatę za każdy wynajęty pokój jest niższa o 4 złote pomnożone przez liczbę pokoi, które firma rezerwuje ponad liczbę 30.

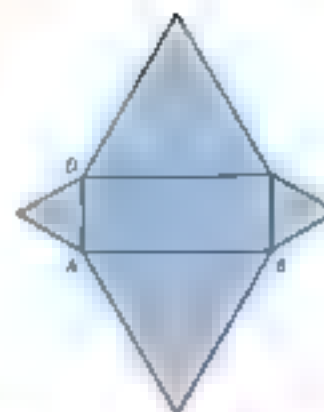
- Jaka liczba rezerwowanych przez daną firmę pokoi dawałaby hotelowi największy przychód na dobę?
- Przy jakiej liczbie wynajętych pokoi właściciel hotelu osiągnie największy zysk, jeśli uwzględni koszt sprzątania i obsługi każdego pokoju, równy 24 złote za dobę?

**3.113.** Drut długości 2 m trzeba podzielić na dwa kawałki: z jednego powstanie kwadratowa ramka, a z drugiego ramka prostokątna, której długość boków pozostają w stosunku 1 : 3. Jaką długość powinien mieć każdy z tych kawałków drutu, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

**3.114.** Na bokach prostokąta  $ABCD$  o obwodzie 24 cm opisano półkole, jak na rysunku obok. Jakie wymiary powinien mieć ten prostokąt, aby pole figury będącej sumą pola prostokąta i pól dorysowanych półkole było najmniejsze?



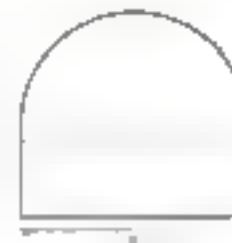
**3.115.** Na bokach prostokąta  $ABCD$  o obwodzie 100 cm dorysowano trójkąty równoboczne, jak na rysunku obok. Jakie powinny być długości boków prostokąta, aby pole figury będącej sumą pola prostokąta i pól dorysowanych trójkątów było najmniejsze?



**3.116.** Drut długości 100 cm podzielono na dwie części: z jednej zbudowano kwadratową ramkę, a z drugiej okrąg. Jaka powinna być długość każdej części, aby suma pól figur ograniczonych drutem była najmniejsza?

**3.117.** Drut o długości 8 m należy podzielić na dwa kawałki: z jednego powstanie kwadratowa ramka, a z drugiego – ramka w kształcie trójkąta równobocznego. Jaką długość powinien mieć każdy z tych kawałków, aby suma pól kwadratu i trójkąta była najmniejsza?

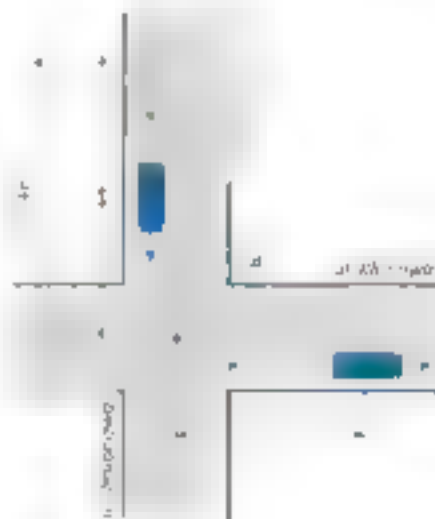
- 3.118.** Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze półkolem, jak na rysunku obok. Obwód okna ma 4 m. Oznacz długość podstawy prostokąta przez  $x$ . Następnie:
- napisz wzór funkcji pola  $P$  powierzchni okna, w zależności od  $x$
  - określ dziedzinę funkcji  $P$
  - wyznacz długość podstawy prostokąta tak, aby pole powierzchni okna było największe



**3.119.** Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze trójkątem prostokątnym równoramiennym, jak na rysunku obok. Obwód okna wynosi 4 m. Jaka powinna być podstawa okna, aby jego powierzchnia była największa?



**3.120.** Ulica Klonowa jest prostopadła do ulicy Jesionowej, a środek skrzyżowania ulic znajduje się w punkcie  $P$ . W chwili  $t_0$  samochód podróżujący na wschód ze stałą prędkością 40 km/h mija punkt  $P$ , a samochód podróżujący na południe ze stałą prędkością 60 km/h znajduje się dokładnie 5 km na północ od punktu  $P$ .



- a) Wyznacz wzór funkcji  $y = d(t)$ , opisujący odległość [km] między tymi samochodami w zależności od czasu  $t$  [h].  
b) Oblicz, po jakim czasie  $t$  od chwili  $t_0$  odległość między samochodami będzie najmniejsza. Oszacuj tę odległość z dokładnością do 0,1 km.

## Równania kwadratowe

**3.121.** Rozwiąż równanie:

- a)  $(x + 2)^2 = 0$       b)  $4x^2 - 7x = 0$   
d)  $4x^2 - 12x + 9 = 0$       e)  $3x^2 - 6 = 0$

**3.122.** Rozwiąż równanie:

- a)  $81x^2 - 25 = 0$       b)  $1 - 4x = 0$   
d)  $(x - 3)^2 = 25$       e)  $2(x + 1)^2 = 18$

**3.123.** Rozwiąż równanie:

- a)  $2x^2 + 5x - 2 = 0$       b)  $3x^2 - 7x > 0$   
d)  $2(x^2 + 4) = 3x$       e)  $49x^2 = 4x$

**3.124.** Rozwiąż równanie:

- a)  $3x^2 + 5x = 2$       b)  $5x = 2x^2 + 3$   
d)  $6(x^2 + 2) = 4(3 - x)$       e)  $5x^2 = 7 - 9x$   
c)  $4x^2 - x = 7$   
f)  $2x + 3 = 8x + 8$

- c)  $3x^2 - 8 = 0$   
f)  $x^2 - 3 - x - 7 = 0$

- c)  $\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = 7$   
f)  $(x - 13) \cdot x + 1 = 0$

- c)  $9x^2 = 12x - 4$   
f)  $16x^2 + 25 = 40x$

**3.125.** Rozwiąż równanie:

- a)  $(2x + 6)(5 - x) = 0$       b)  $5x(x + 7) - 3x = 0$   
c)  $x(x - 1) - 3(x - 1) = 0$       d)  $(x + 1)^2 - 100 = 0$   
e)  $4 - (x + 3)^2 = 0$       f)  $x(x + 2) - x + 2 = 0$

**3.126.** Rozwiąż równanie:

- a)  $x(x + 5) - x = 5$       b)  $(x - 1)^2 - (x - 1)$   
c)  $x = (4 - x)(x + 4)$       d)  $x(2x - 1) - (1 - 2x)(1 + 2x)$   
e)  $81 - (3x + 7)^2 = 0$       f)  $(2x + 1)(2x + 1) = 4$

**3.127.** Rozwiąż równanie:

- a)  $x + 1, 2x - 3 = (x + 1)x - 0$       b)  $(3x - 1)(3x + 1) = 10x + 3$   
c)  $(5x + 1) = (7x - 2)$       d)  $(2x - 7)^2 = 4x - 1$   
e)  $(3x - 1)(4x - 3) = (3x - 1)(2x - 1)$       f)  $(2x - 1)^2 - 3x^2 = 6(x - 4)$

**3.128.** Rozwiąż równanie:

- a)  $x^2 - (3x - 1)^2 = 56x - 43$       b)  $11 - 14x = (2x - 1)$   
c)  $(2x - 1, 1 + 2x) = 8$       d)  $2x^2 - 11x + 21 = (-x + 5)(5 + x)$   
e)  $(2x - 3)(x - 1) = 1 + x - 2)(3x - 2)$       f)  $3x - 1 = (2x - 3)^2 + 2(x + 6) - x$

**3.129.** Rozwiąż równanie:

- a)  $(2x - 3)(2x + 3) = (x + 5)^2 - 9$   
b)  $2x(x - 3) - (x - 1)(x + 2) = (2x - 3)^2$   
c)  $2x - 1 - (4x + 1)(4x - 1) = 4x - 1 - 2x$   
d)  $(2x + 1)^2 - 9(x - 1)^2 = 4 - x$   
e)  $(x - 1)^2 + 2(x - 3)^2 = 18 - 10x$   
f)  $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2 = 3x^2 + 41x - 4$

**3.130.** Rozwiąż równanie:

- a)  $8x - 2x - 3x - 1 = 2x + 3$       b)  $x - 3x - 9 = 63 - (x - 3)x + 31$   
c)  $(2x - 4)(2x + 4) = (3x - 1)^2 - 16$       d)  $6 - (1 - x)^2 = (2x - 3)^2 - (3x + 2)^2$   
e)  $(x^2 - 3x + 1)(x + 2) = x^2 - 2x - 1$       f)  $(2x - 3)(3x + 5) = (3 - 2x)(x + 3)$

**3.131.** Rozwiąż równanie:

- a)  $(2x + 5)^2 - x(x + 20) = 0$       b)  $x(4 - x) = (2x + 3)(x - 2) + 8$   
c)  $8x(7 - 3x) + 1 = 4(2 - x)(x + 2)$       d)  $(4 - x)^2 - (2 + x) = x^2 + 12$   
e)  $(2x - 1)(2x + 1) + 2 = 9x - 5x(x + 3)$       f)  $(x - 6)(6 + x) = (4x + 3)^2 - (2 - x)^2$

**3.132.** Rozwiąż równanie:

a)  $\frac{x-2}{2} + \frac{3-x}{4} = \frac{3x}{4} - 2 - 3x - x$

b)  $\frac{(3-x)(x+3)}{3} - \frac{(x+2)^2}{6} = \frac{5\frac{1}{2}-x}{2}$

c)  $\frac{2x-3}{5} + \frac{3(x-1)}{2} = \frac{(x-1)(x-1)}{2} - x + 3$

d)  $\frac{3x-1}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5-2}{3} - \frac{x(x+2)}{2} - x - 7$

**3.133.** Rozwiązaniem danego równania z niewiadomą  $x$  jest liczba podana obok tego równania. Oblicz  $a$ .

a)  $5 + (a^2 - 18)x + 6x^2 = 0$ ;  $2\frac{1}{2}$

b)  $15x^2 + (a^2 + 2a - 2)x - 6 = 0$ ;  $-\frac{2}{3}$

**3.134.** Rozwiąż graficznie równanie:

a)  $x^2 + x = 6$

b)  $x = (2-x)^2$

c)  $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 4$

d)  $x - 5x + 6 = 4\frac{1}{4} - x + 2\frac{1}{2}$

**3.135.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $a$ , równanie

$$\frac{1}{4}x^2 + 3 - 4a + x - 8(2a^2 - 3a) + 9 = 0$$

ma tylko jedno rozwiązanie. Wyznacz to rozwiązanie.

**3.136.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $m$  równanie  $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$  ma dwa różne rozwiązania, których suma jest równa  $2m$ .

**3.137.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $k$  równanie  $x^2 - (2k-5)x - 5 = 0$  ma dwa różne rozwiązania, których iloczyn jest równy  $-5$ .

## Równania prowadzące do równań kwadratowych

**3.138.** Rozwiąż równanie:

a)  $x^4 = 16x^2$

b)  $x^6 - 10x^2 + 25 = 0$

c)  $x^4 - 3 = 2x^2$

d)  $x^4 = 12x^2 + 35 = 0$

e)  $4x^4 = 9 = 37x^2$

f)  $x^4 + 2x^2 = 24$

**3.139.** Rozwiąż równanie:

a)  $x^4 = 5x^2 - 4$

b)  $x^4 + 5x = 14$

c)  $x^4 - 25x - 144 = 0$

d)  $x^4 - 25x^2 = 0$

e)  $x^4(x+8) - 15 = 0$

f)  $4x^4 - 3(3x^2 - 1) = 2x$

**3.140.** Rozwiąż równanie:

a)  $4x^2(x-2) - 2 = 5(x-1)(x-1)$

b)  $(x+3)^2 - 3 + x - 5x^2$

c)  $x^2(2x-1)(2x+1) = 2 - x^2(x^2+10)$

d)  $(x^2-x+3)(x^2+2x) = x(6+x^2)$

e)  $(x-3)^2 - 24 - 2x^2 - 14x$

f)  $3(x^2+3) - (x-1) = 12x$

**3.141.** Rozwiąż równanie:

a)  $x^4 - 18x = (x-9)(2x+3) + 23$

b)  $(x-6)(2-x)^2 - 36 - x^4 + 12x^2$

c)  $2x - 1 - (2x-3)^2 = x^4 + 56$

d)  $x - 1 - 4(x^2-1) + 4 = 0$

e)  $(2x+3)(2x^2-3) + 10 = 5x^4$

f)  $x - 1 - (9x-4) = 5 - 7x$

**3.142.** Rozwiąż równanie:

a)  $(x^2-4)^2 = 9(x-4)$

b)  $(x^2+3)^2 - 5(x^2+3) + 4 = 0$

c)  $(x+2x)^2 + 9 = 6x + 12x$

d)  $(x^2-8x)^2 + 5 = 2(x^2-8x)$

e)  $(x^2-x)^2 = 20x^2 - 20x$

f)  $(x^2+3x-1)^2 + 7(x^2+3x-1) = -12$

**3.143.** Rozwiąż równanie:

a)  $x+4=5\sqrt{x}$

b)  $2x - 7\sqrt{x} + 3 = 0$

c)  $7\sqrt{x} = 3x+2$

d)  $2x+1=3\sqrt{x}$

e)  $x+\sqrt{x-1}=7$

f)  $x+5\sqrt{x+2}+8=0$

**3.144.** Rozwiąż równanie:

a)  $\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = 0$

b)  $0.5\sqrt{x} - 2.5\sqrt{x} - 3 = 0$

c)  $\frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{7}{3}\sqrt{x} = 6$

d)  $2\sqrt{x} - 7\sqrt{x} + 6 = 0$

**3.145.** Rozwiąż równanie:

a)  $x^2 - 2\sqrt{x} - 1 = 2 = 0$

b)  $x^2 + \sqrt{x^2+20} = 22$

c)  $2x^2 - 5\sqrt{x^2+2} + 6 = 0$

d)  $x^2 + 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$

**3.146.** Rozwiąż równanie:

a)  $\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x-3} - 2$

b)  $6\sqrt{x+2} - 7\sqrt{x-2} - 2 = 0$

c)  $2\sqrt{x-1} - 5\sqrt{x-1} = -3$

d)  $\sqrt{x-5} = 4\sqrt{x-5} - 3$



## Nierówności kwadratowe

3.147. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 2x^2 + 2 > 0 & \text{b)} \frac{x^2}{4} \leq 0 & \text{c)} -3x^2 + 2x \geq 0 \\ \text{d)} x^2 - 25 > 0 & \text{e)} -x^2 - 4 > 0 & \text{f)} x^2 > x \end{array}$$

3.148. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 3(x-2)(x+4) < 0 & \text{b)} 9x + 1 \leq 6x & \text{c)} x < 6x^2 \\ \text{d)} (2x-1)(2x+1) < 0 & \text{e)} x + 4 = x & \text{f)} (5-x)(x+2) < 0 \end{array}$$

3.149. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (x-3)^2 \leq 4 & \text{b)} 4x - 2x \geq 5x & \text{c)} (1-x)(3-2x) < 0 \\ \text{d)} x(x+6) \leq 6x-8 & \text{e)} x^2 - 3(x-3) \geq 9-3x & \text{f)} 4x(x-1) \leq 3 \end{array}$$

3.150. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{lll} \text{a)} -4x^2 < 1 & \text{b)} -2x(5-x) \leq 0 & \text{c)} 28x \geq 4x^2 + 49 \\ \text{d)} x^2 < 2-x & \text{e)} 3x^2 + 1 > 2,5x & \text{f)} x-7 \geq 5x^2 \end{array}$$

3.151. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1}{2}x^2 - x \geq 1 & \text{b)} (2x-1)^2 > 16 & \text{c)} 9 + 25x^2 \leq 30x \\ \text{d)} (5x + 1)^2 + 4 < 0 & \text{e)} 9x = 4(3x-1) > 0 & \text{f)} 9 - (2x-1)^2 = 0 \end{array}$$

3.152. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 8x - 1 > 16x^2 & \text{b)} 2x^2 + 4 \geq 3x & \text{c)} (2-x)(x+3) < 0 \\ \text{d)} (2x-5)^2 \leq 0 & \text{e)} -1 < -(1-x)^2 & \text{f)} 25x^2 > 4(5x-1) \end{array}$$

3.153. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x-3(2x+5) \leq 2x-6(2x-1) & \text{b)} (2-8x)(x+1) \leq 1-4x(x+2) \\ \text{c)} (3-5x)(2x+1) \leq (2x+1)(3x+2) & \text{d)} 2-6x(3x-9) < x^2-9 \\ \text{e)} (x+5)^2 \geq (2x+10)^2 & \text{f)} (2x-3)^2 < (x-1,5)^2 \end{array}$$

3.154. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x(x+6) < 3(4x-3) & \text{b)} -2x^2 + 5(x+1) < 2(x+2) - 3x(x-1) \\ \text{c)} 2x(x-2) - 7 > -4(x+3) & \text{d)} 8(x-2) - x(x-2) \geq -16 \\ \text{e)} 9(1-x) = x - 10x + 3 & \text{f)} 1-2x(x-3) < x(5-4x) \end{array}$$

3.155. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (3-2x)(2x+3) > 1-2x(x+3) & \text{b)} (2x-3)^2 \leq (x+2)^2 \\ \text{c)} x^2 + 6x + 9 \leq (2x-1)^2 & \text{d)} (2x-1)(5x+3) \leq 13 + (3x-1)^2 + x \\ \text{e)} (-x-5)(5+x) + 9x \leq 2(x-1)^2 & \text{f)} 2,5x - 4(x+4) \leq 3x(2x+3) \end{array}$$

3.156. Rozwiąż nierówność

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{(x-1)^2}{5} - \frac{2(x+3)}{2} \geq \frac{(x-2)^2}{10} - 43 & \\ \text{b)} \frac{x-3}{3} \leq \frac{(2x-1)(x+2)}{2} - \frac{x-1}{2} - \frac{3x-2}{3} & \\ \text{c)} \frac{x^2-4}{5} \geq \frac{3}{2} - \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{1}{8} & \\ \text{d)} \frac{x^2-2x+3}{3} - \frac{x^2+4}{24} < \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{x-4}{2} & \end{array}$$

3.157. Rozwiąż graficznie nierówność

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x^2 - 6x + 9 < x + 5 & \text{b)} x^2 - 1 < x - 3 & \text{c)} x - 2x - 3 > 2x - 3 \\ \text{d)} x - 8 < x^2 + x - 6 & \text{e)} x^2 + 2x - 3 \leq \frac{1}{5}(x-1)^2 & \text{f)} \frac{1}{9}x(6-x) < (x-3)^2 + 1 \end{array}$$

3.158. Podaj przykład nierówności kwadratowej

- sprzecznej
- które, zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \vee x \geq 4\}$
- której zbiorem rozwiązań jest zbiór  $\mathbb{R}$
- której zbiór rozwiązań jest jednoelementowy
- której zbiorem rozwiązań jest przedział liczbowy  $(2, 7)$
- której zbiorem rozwiązań jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

3.159. Dana jest nierówność kwadratowa  $(3x-4)(2x+\sigma) \leq 0$  z niewiadomą  $x$ . Wyznacz liczbę  $\sigma$ , dla której zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział  $\left(1\frac{2}{3}, 4\right]$ .

3.160. Dana jest nierówność kwadratowa  $(5\sigma-4x)(x-1) \geq 0$  z niewiadomą  $x$ . Wyznacz liczbę  $\sigma$ , dla której zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział  $[-3, 1]$ .

3.161. Dana jest nierówność kwadratowa  $(2x - 3)(6x + 5) = 0$  z niewiadomą  $x$ . Wyznacz liczbę  $a$ , dla której jedynym rozwiązaniem nierówności jest liczba  $1\frac{1}{2}$ .

3.162. Wyznacz zbiory  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  oraz  $B - A$ , jeśli:

$A$  – zbiór tych argumentów, dla których funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  przyjmuje wartości nieujemne

$B$  – zbiór tych argumentów, dla których funkcja kwadratowa  $g(x) = x^2 + 3x$  przyjmuje wartości większe od 0.

3.163. Dane są zbiory

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 7x + 4 \leq 3x - 5\}$$

Wyznacz zbiory  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ .

3.164. Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$  określonej wzorem

a)  $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 8}$

b)  $f(x) = \sqrt{4x - 2x}$

c)  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 9x - 12}$

d)  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x - 1}$

e)  $f(x) = \frac{5x - 7}{\sqrt{4 - (x + 1)}}$

f)  $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{\sqrt{25x^2 - 40x - 16}}$

3.165. Wyznacz wszystkie wartości  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których liczba  $x$  należy do podanego przedziału liczbowego, jeśli:

a)  $x = m^2 - 4m$ ,  $x \in (5, +\infty)$

b)  $x = 5 + 2m - 2m^2$ ,  $x \in (-\infty, -7)$

c)  $x = m^2 - 3m$ ,  $x \in (-2, 4)$

d)  $x = m^2 + 5m + 1$ ,  $x \in (-5, -3)$

3.166. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór liczb rzeczywistych, jeśli:

a)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - mx + 2}$

b)  $f(x) = \sqrt{3x^2 + mx - m - 3}$

c)  $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + (m - 1)x + 4}}$

d)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + (m + 2)x + m}}$

## Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

3.167. Suma kwadratów dwóch liczb różniących się o 4 jest równa 400. Wyznacz te liczby.

3.168. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 308. Wyznacz te liczby.

3.169. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 155. Wyznacz te liczby.

3.170. W liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek, zaś cyfra jedności o 1 mniejsza od cyfry dziesiątek. Kwadrat cyfry dziesiątek jest równy sumie kwadratów pozostałych cyfr. Wyznacz tę liczbę.

3.171. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 5. Jeśli tę liczbę pomnożymy przez liczbę dwucyfrową o takich samych cyfrach, ale zapisanych w odwrotnej kolejności, to otrzymamy 736. Wyznacz tę liczbę.

3.172. W trzycyfrowej liczbie naturalnej cyfra setek jest taka sama jak cyfra jedności, zaś cyfra dziesiątek jest o 3 większa od cyfry jedności. Jeżeli tę liczbę zmniejszymy o kwadrat sumy jej cyfr, to otrzymamy 105. Wyznacz tę liczbę trzycyfrową.

3.173. Ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest o 117 większa od liczby jego boków?

3.174. Na płaszczyźnie zaznaczono  $n$  punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Następnie połączono te punkty odcinkami. Ile jest tych punktów, jeśli wyznaczyły one 15 odcinków?

3.175. Do turnieju siatkówki zgłoszyły się reprezentacje klas pierwszych pewnego liceum. Klasy rozegrały każda z każdą po jednym meczu. Wszystkich meczów rozegrano 10. Ile klas brało udział w tym turnieju?

3.176. Na jednym z osiedli mieszkaniowych znajduje się rabata kwadratowa w kształcie trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne różnią się o 7 m. Powierzchnia rabaty wynosi 30 m<sup>2</sup>. Ile metrów płotki potrzeba na ogrodzenie tej rabaty?

3.177. Robotnik przecinał blachę w kształcie trójkąta prostokątnego wzdłuż wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną, dzieląc ją na dwa trójkąty prostokątne. Wspólna przyprostokątna powstałych trójkątów ma długość 2 m, zaś drugie przyprostokątne różnią się o 70 cm. Oblicz powierzchnię kawałków blachy po rozcięciu.

3.178. Prostokątny obraz bez ramy ma wymiary 82 cm x 36 cm, a wraz z ramą zajmuje powierzchnię 3567 cm<sup>2</sup>. Oblicz jaką szerokość ma rama tego obrazu.

**3.179.** Park miejski ma kształt rombu, którego obwód wynosi 2 km. Dwie główne alejki spacerowe wyznaczone są przez przekątne rombu, a jedna z nich jest o 200 m dłuższa od drugiej. Oblicz długość tych alejek.

**3.180.** W pewnym prostokącie jeden z boków skrócono, a drugi wydłużono o  $p\%$ , tak, że pole prostokąta zmniejszyło się o 9%. Oblicz  $p$ .

**3.181.** Druk długości 64 cm podzielono na dwa kawałki. Z jednego kawałka wykonano kwadratową ramkę, a z drugiego ramkę prostokątną, której stosunek długości boków jest równy  $3 : 1$ . Oblicz długości kawałków drutu, wiedząc, że suma powierzchni wyznaczonych przez obie ramki wynosi  $112 \text{ cm}^2$ .

**3.182.** Kupiec ma dwie beczki wina dwóch różnych szeregów. Stosunek liczby litrów wina z pierwszej beczki do liczby litrów wina z drugiej beczki jest równy  $3 : 2$ . Litr wina z pierwszej beczki kosztuje tyle złotych, ile jest równe 25% liczby litrów wina, znajdującego się w drugiej beczce. Litr wina z drugiej beczki jest o 10 zł droższy od litra wina z pierwszej beczki. Wiedząc, że łączna wartość win w obu beczkach jest równa 4800 zł, oblicz:

- ile litrów wina jest w każdej beczce
- cenę jednego litra każdego z tych win.

**3.183.** Pewna osoba zapytana, ile ma lat, odpowiedziała: „Jeżeli całkowitą liczbę moich lat pomnożymy przez liczbę o 50 mniejszą, do otrzymanego iloczynu dodamy 624, to otrzymamy liczbę ujemną”. Czy na tej podstawie można ustalić, ile lat ma ta osoba?

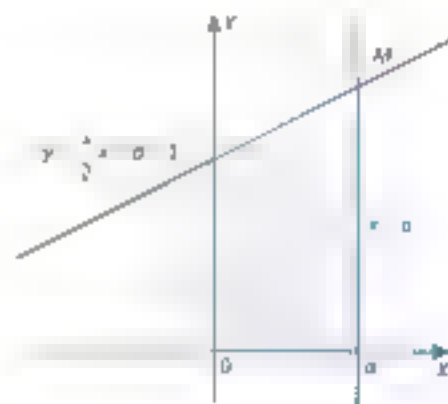
**3.184.** Jak dobrać wymiary prostokąta, aby jego pole było nie mniejsze niż 5, nie większe niż 12, a długość boków były liczbami naturalnymi, różniącymi się o 4? Podaj wszystkie możliwości.

**3.185.** Proste o równaniach

$$y = \frac{1}{2}x + a + 1 \text{ oraz } x = a, \text{ gdzie } a \text{ jest}$$

liczbą rzeczywistą dodatnią, przecinają się w punkcie  $M$  i wraz z osiami układu współrzędnych ograniczają trapez prostokątny (zobacz rysunek obok).

- Napisz wzór funkcji  $P$  – określającej pole tego trapezu w zależności od  $a$ , gdzie  $a \in (0, +\infty)$ .



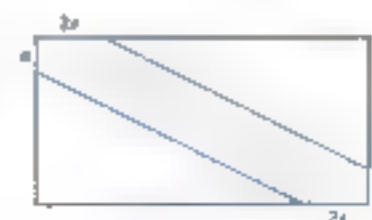
b) Wyznacz liczbę  $a$ , dla której pole trapezu jest równe 3.

c) Wyznacz wszystkie wartości  $a$ , dla których pole trapezu jest większe od 24, jednocześnie nie większe od 51.

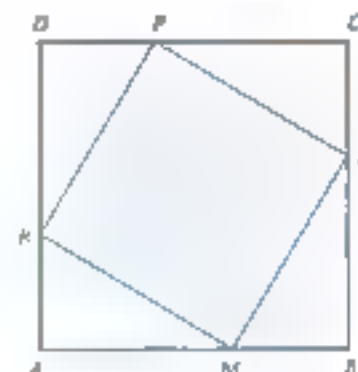
**3.186.** Wyznacz wszystkie dwucyfrowe liczby naturalne o sumie cyfr równej 9, które spełniają warunek: iloczyn liczby i jej cyfry jednostki jest większy od 144.

**3.187.** Ile jest wielokątów wypukłych, w których liczba przekątnych jest mniejsza od potrójonej liczby jego boków?

**3.188.** Przez działkę w kształcie prostokąta o wymiarach  $20 \text{ m} \times 40 \text{ m}$  ma przebiegać ścieżka w sposób pokazany na rysunku. Powierzchnia ścieżki może stanowić co najwyżej 9,75% całej powierzchni działki. Jaką największą wartość może przyjąć  $x$ ?



**3.189.** W kwadrat  $ABCD$  o boku 7 cm wpisano kwadrat  $MNPR$  tak, że punkty  $M, N, P, R$  należą odpowiednio do boków  $AB, BC, DC$  oraz  $AD$ . Wiedząc, że pole kwadratu  $MNPR$  jest równe  $25 \text{ cm}^2$ , oblicz długości odcinków, na jakie punkty  $M, N, P, R$  podzieliły boki kwadratu  $ABCD$ .



**3.190.** Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 30, a suma kwadratów długości wszystkich boków trójkąta wynosi 338. Wyznacz wysokość poprowadzoną na przeciwprostokątną.

## Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego

**3.191.** Rozwiąż dane równanie, stosując metodę analizy stałych

- a)  $\sqrt{1-3x} = -x-3$       b)  $\sqrt{x+\sqrt{140}} + x = 4$   
 c)  $3\sqrt{x+2} = \sqrt{22-9x}$       d)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 3$   
 e)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} = 2$       f)  $\sqrt{3-4x} = 2x$

**3.192.** Rozwiąż dane równanie, stosując metodę równań równoważnych

- a)  $\sqrt{1-5x} = 7+x$       b)  $x-5 = 4 + \sqrt{x-3}$   
 c)  $\sqrt{4-x} = x$       d)  $\sqrt{x-4x} = 1-2x$   
 e)  $\sqrt{x^2+3} = x^2-3$       f)  $2\sqrt{25x^2-9} = 9-x^2$

**3.193.** Rozwiąż dane równanie, stosując metodę równań równoważnych

- a)  $\sqrt{(2-x)(8-x)} = 4-x$       b)  $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$   
 c)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$       d)  $\sqrt{10-x} + \sqrt{10-x} = \frac{x}{3}$   
 e)  $\sqrt{x^2-2x-3} - 1 = x$       f)  $\sqrt{x^2-3} + x^2 = 5$

**3.194.** Rozwiąż dane równanie, wprowadzając pomocniczą niewiadomą

- a)  $x^2 - 4\sqrt{x^2-4x} = 4(x-1)$       b)  $x^2 - 4x + 4\sqrt{x^2-4x+3} = 2$   
 c)  $2x^2 - 5\sqrt{x^2-1} = 0$       d)  $x^2 - 5x + 30 = 10\sqrt{x^2-5x+6}$

**3.195.** Rozwiąż równanie.

- a)  $\sqrt{5x^2+16x+12} = 5x-2$       b)  $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$   
 c)  $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = x$       d)  $\sqrt{3x-2} + 2 = 2\sqrt{x+2}$   
 e)  $x^2 - 4x = 2\sqrt{x-4x-5} - 4$       f)  $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

**3.196.** Rozwiąż nierówność

- a)  $\sqrt{x-2} < 8-x$       b)  $\sqrt{x+3} + 3 > x$   
 c)  $7\sqrt{8-x} + 20 = x$       d)  $\sqrt{10-x} < \frac{13}{4}x$   
 e)  $\sqrt{x-8} < 3x$       f)  $2x \geq \sqrt{5-x^2}$

**3.197.** Rozwiąż nierówność

- a)  $\sqrt{x-5x} > 4x$       b)  $\sqrt{9-x^2} \leq x$   
 c)  $\sqrt{(x+7)(x+1)} + 3 > x$       d)  $\sqrt{x+4x-5} + x = 7$   
 e)  $x > \sqrt{x^2} + x - 2$       f)  $2x < 1 + \sqrt{4x-x} - 14$

**3.198.** Rozwiąż nierówność

- a)  $x+12 \geq \sqrt{(2-x)(x+3)}$       b)  $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} \geq 2$   
 c)  $\sqrt{17+x} + \sqrt{17-x} < 8$       d)  $\sqrt{12+5x-2x^2} + x > 6$   
 e)  $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} > \sqrt{8x-5}$       f)  $\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x} - 4 \geq 0$

**3.199.** Rozwiąż nierówność

- a)  $\sqrt{3x-2x-1} > 2x$       b)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} - 1 \leq 0$   
 c)  $\sqrt{10+x} - 6 < -\sqrt{10-x}$       d)  $4 + \sqrt{12-2x} > 3x$   
 e)  $\sqrt{4x-5} > \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4}$       f)  $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} < 2$

**3.200.** Rozwiąż równanie

- a)  $\sqrt{5+x} - 4\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} - 6\sqrt{x+1} = 1$   
 b)  $\sqrt{3+x} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{8-x} - 6\sqrt{x-1} = 1$   
 c)  $\sqrt{x-4} + 4\sqrt{x-8} + \sqrt{x-7} + 2\sqrt{x-8} = 1$   
 d)  $\sqrt{x+19} + 8\sqrt{x+3} + \sqrt{x+7} + 4\sqrt{x+3} = 2$



## Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną

3.201. Narysuj wykres funkcji:

a)  $f(x) = |x-3| (x-1)$

c)  $f(x) = x(x+1) - x$

b)  $f(x) = (x+1) |x-2|$

d)  $f(x) = x^2 + 4|1-x|$ , gdzie  $x \in (0, 2)$

3.202. Narysuj wykres funkcji:

a)  $f(x) = |x^2 + 1| - 2$

c)  $f(x) = |x| |x-3|$

b)  $f(x) = |2-x| |2+x|$

d)  $f(x) = |x^2 + 2(x-4)|$

3.203. Narysuj wykres funkcji:

a)  $f(x) = x^2 - 4|x|$

c)  $f(x) = 1 - (x-2)^2$

b)  $f(x) = |x|2 + |2x|$

d)  $f(x) = 2 - 3|x| + x^2$

3.204. Narysuj wykres funkcji:

a)  $f(x) = |x^2 - 1| + x^2$

c)  $f(x) = |x^2 - 4| - 2x$

b)  $f(x) = x^2 - 2x - x^2$

d)  $f(x) = -x^2 - 3x + |x^2 + 3x|$

3.205. Narysuj wykres danej funkcji, stosując odpowiednie przekształcenia.

a)  $f(x) = x^2 - 4|x| - 1$

c)  $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$

b)  $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$

d)  $f(x) = x^2 - 3|x| + 2|x| - 1$

3.206. Napisz wzór funkcji  $f$  bez symbolu wartości bezwzględnej, narysuj jej wykres.

a)  $f(x) = x^2 - x - x^2 - 4$

c)  $f(x) = 3x - \sqrt{x} - 8x - 16$

b)  $f(x) = x^2 - 2|x| + x^2 - 2x + 1$

d)  $f(x) = x^2 + 3x - 4 - x^2 + 3x + 2$

3.207. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = x|x-2| + x$  gdzie  $x \in \mathbb{R}$ . Odczytaj z wykresu:

a) zbiór wartości funkcji  $f$ ,

b) dla jakich argumentów wartość funkcji  $f$  wynosi 2,

c) przedziały, w których funkcja  $f$  jest rosnąca.

3.208. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = x^2 + 4x + 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Czy funkcja  $f$  jest parzysta?

a) Podaj zbiór wartości funkcji  $f$

b) Rozwiąż nierówność  $f(x) > 0$

c) Określ przedziały monotoniczności funkcji  $f$ .

3.209. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = -x^2 - 2|x| - 3| + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

a) Czy funkcja  $f$  jest czy nie jest parzysta, nieparzysta?

b) Podaj liczbę miejsc zerowych funkcji  $f$ .

c) Określ znak liczby  $f(-4) \cdot f(-1) + f(-3)$ .

3.210. Zapisz wzór funkcji  $f(x) = x^2 - 4|x| + x$  bez użycia znaku wartości bezwzględnej.

a) Narysuj wykres funkcji  $f$ .

b) Określ liczbę rozwiązań równania  $f(x) = 4$ .

c) Podaj zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) > -x + 4$ .

## Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

3.211. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a)  $|x-3| = 4|x-3|$

c)  $3(x+2) + 16|x+2| + 5 = 0$

e)  $(x+1)(|x|-1) = -0,5$

b)  $x^2 - 6|x| + 5 = 0$

d)  $x^2 + 4|x| + x - 2 = 16$

f)  $|4-x| + 0,5x^2 = 4$

3.212. Rozwiąż algebraicznie równanie:

a)  $2x^2 - |x| = 15$

c)  $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$

e)  $2x^2 - 2x - 5 = 2,5$

b)  $|x^2 - 6|x| + 4| = 4$

d)  $\frac{1}{2}(x-4)^2 = |x-4|$

f)  $2x^2 - 3x + 8 = 2x^2 - 6x + 16$

3.213. Rozwiąż graficznie równanie:

a)  $x + 2x - 2|x| + 1 = 7$

c)  $0,5(x+1)^2 + 2 = 2,5|x-1|$

e)  $2 - |x| = 4 - x$

b)  $(|x| + 4)(1 - |x|) = 5$

d)  $4 - 4|x| = x$

f)  $|x^2 - 4x| = |x-2| + 2$

3.214. Rozwiąż równanie:

a)  $(x+5)^2 - 3|x+5|$

c)  $4(x-2)^2 + 1 = |x-2| - 3$

e)  $x^2 - x + 1 = x - 1$

b)  $(x-1)(x+1) = 3$

d)  $x^2 - 2x + 3 = 3|x+1|$

f)  $x^2 - x + 2x - 3 = 4$

## 3.215. Rozwiąż równanie

a)  $|x^2 + 2x + 3| = |2x|$

b)  $|4 - x| = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$

c)  $x^2 + 12 = 8x + |x^2 - 8x + 12|$

d)  $|x^2 - 3x| - 1 = 3$

e)  $|x^2 - 9| = 9 - x$

f)  $|x - 1| + |x + 1| = 0$

## 3.216. Rozwiąż równanie:

a)  $|x^2 - 3x| + x = 2$

b)  $|x - 1| + |x - 3| = 16$

c)  $|x + 2x - x| = |x| - 1$

d)  $|x^2 - 5|x + 1| + 25 = 3x + 5|x - 4|$

e)  $|x^2 - 2| + |x^2 - 5| = 3$

f)  $|x^2 - 1| - 4x = |x - 5|$

## 3.217. Rozwiąż algebraicznie nierówność:

a)  $|x^2 + 3x + 1| \leq 1$

b)  $|x^2 - |x| - 2| \geq 0$

c)  $|x^2 + 12| > 7|x|$

d)  $|x^2 - 4x| < 4|x|$

e)  $(x - 1)^2 + |x - 1| - 6 < 0$

f)  $(x + 2)^2 - 9|x + 2| < 0$

## 3.218. Rozwiąż graficznie nierówność:

a)  $|x^2 - 7| = |x^2 - 1|$

b)  $|x^2 - 4| > x + 2$

c)  $(x - 1)(x - 3) > x + 3$

d)  $|x^2 - 3x - 4| = 0$

e)  $|x^2 + 4x + 3| \geq 3 - x$

f)  $|x^2 - 4|x| + 3| > 3$

## 3.219. Rozwiąż nierówność:

a)  $|x^2 + 10| \leq 7|x|$

b)  $(x - 1)^2 + 2x < 1 + 3|x|$

c)  $2x^2 - 3|2x - 1| < 2x - 3$

d)  $|x^2 + 4x + \frac{1}{2}x - 3| > -5$

e)  $|x^2 + 5x - 2| \geq 6$

f)  $|x \cdot |x + 1| + 2| < |x| \cdot |x + 2|$

## 3.220. Rozwiąż nierówność:

a)  $|x - 3| = |x| - 9$

b)  $(x - 2 + x - 3)|x - 3|$

c)  $|x^2 - |x| - 2| > 2$

d)  $|x^2 - 5x| = 5x$

e)  $|x^2 - 5|x - 1| \leq 2x - 7$

f)  $|x^2 - 1| + |x^2 - 3| > 4$

## Wzory Viete'a

3.221. Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe. Nie obliczając tych miejsc zerowych, ustal ich znaki.

a)  $f(x) = x^2 + 4x + 3$

b)  $f(x) = x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6}$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4$

d)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 7x - 24$

3.222. Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe, które są liczbami całkowitymi. Wyznacz te liczby, korzystając ze wzorów Viete'a.

a)  $f(x) = x^2 + 5x + 6$

b)  $f(x) = x^2 - 2x - 8$

c)  $f(x) = x^2 - 8x + 7$

d)  $f(x) = x^2 - 12x + 20$

e)  $f(x) = x^2 - 4x + 5$

f)  $f(x) = x^2 - 6x + 27$

3.223. Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe  $x_1, x_2$ . Wyznacz brakujące współczynniki we wzorze funkcji  $f$ , jeśli:

a)  $f(x) = x^2 + bx + c$  oraz  $x_1 = -2,5, x_1 + x_2 = -1,5$

b)  $f(x) = ax^2 + 2x + c$  oraz  $x_1 = -2, x_1 \cdot x_2 = -6$

c)  $f(x) = ax^2 + bx + 42$  oraz  $x_2 = 7, x_1 + x_2 = 10$

d)  $f(x) = ax^2 + bx - 4$  oraz  $x_2 = -4, x_1 \cdot x_2 = -8$

3.224. Funkcja  $f(x) = ax^2 + bx + c$  gdzie  $a \neq 0$ , ma dwa miejsca zerowe  $x_1, x_2$ . Określ znaki współczynników we wzorze funkcji  $f$ , wiedząc, że:

a)  $f(0) = 3$  oraz  $x_1 > 0, x_2 < 0$

b)  $f(0) = 2$  oraz  $x_1 = 0, x_2 < 0$

c)  $f(0) = 5$  oraz  $x_1 = 0, x_2 = 0$

d)  $f(0) = 1$  oraz  $x_1 = 0, x_2 = 0$

e)  $f(0) = 2$  oraz  $x_1 = x_2, x_1 + x_2 > 0$

f)  $f(0) = -3$  oraz  $x_1 = x_2, x_1 + x_2 < 0$

3.225. Funkcja  $f(x) = 2x^2 + px + 10$  ma dwa miejsca zerowe, które są liczbami całkowitymi. Wyznacz te miejsca zerowe i oblicz  $p$ .

3.226. Równanie  $2x^2 - 6x + q = 0$  ma dwa rozwiązania, które są liczbami naturalnymi. Wyznacz te rozwiązania i oblicz  $q$ .

3.227. Sprawdź że funkcja  $y = 2\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3}$  ma dwa miejsca zerowe. Następnie bez obliczania tych miejsc zerowych oblicz:

a) kwadrat ich sumy

b) sumę ich kwadratów

**3.228.** Sprawdź, że funkcja  $y = \sqrt{6x} - 5\sqrt{3x} + 2\sqrt{6}$  ma dwa miejsca zerowe. Następnie bez obliczania tych miejsc zerowych oblicz:

- a) sumę ich odwrotności      b) sumę kwadratów ich odwrotności.

**3.229.** Funkcja  $y = 3\sqrt{2x} - 4\sqrt{6x} + 5$  ma dwa miejsca zerowe  $x_1$  oraz  $x_2$ . Oblicz

wartość wyrażenia  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ .

**3.230.** Liczby  $x_1$  i  $x_2$  są miejscami zerowymi funkcji  $y = 2\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}x + \sqrt{10}$ . Wy-

każ, że  $(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1^2 + x_2^2) = 20 - 6\sqrt{2}$ .

**3.231.** Liczby  $x_1$  i  $x_2$  są miejscami zerowymi funkcji  $y = \frac{2}{5}x^2 - 4x + 5$ . Wykaż, że

$$x_1^4 + x_2^4 = 5312,5$$

**3.232.** Liczby  $4 - 2\sqrt{3}$  i  $4 + 2\sqrt{3}$  są miejscami zerowymi funkcji

$$y = k^2 + (p + q)x + p^2 - q^2.$$

**3.233.** Liczby  $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$  i  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$  są rozwiązaniami równania  $x^2 - (p + q)x + q^2 - 8p = 0$ .

Oblicz  $p + q$ .

**3.234.** Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe, których suma wynosi  $2\frac{1}{2}$ .

a) iloczyn jest równy  $1\frac{1}{2}$ . Wiedząc, że do wykresu funkcji  $f$  należy punkt  $A(1, 4)$ ,

wyznacz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

**3.235.** Funkcja kwadratowa  $f$  jest rosnąca w przedziale  $(-\infty, 2)$  i malejąca w przedziale  $(2, +\infty)$ , a jej miejsca zerowe  $x_1$  i  $x_2$  spełniają warunek  $x_1 \cdot x_2 = 5$ . Wykres funkcji  $f$  przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, 5)$ . Wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.

**3.236.** Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe  $x_1$  i  $x_2$ , takie, że  $x_1 \cdot x_2 = 12$ .

Wiedząc, że dla argumentu  $\frac{1}{2}$  funkcja  $f$  przyjmuje największą wartość, równą  $3\frac{1}{16}$ ,

wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaci iloczynowej.

**3.237.** Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe  $x_1$  i  $x_2$  spełniające dwa warunki:  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 7$  oraz  $x_1 \cdot x_2 = 1$ . Wiedząc, że do wykresu funkcji  $f$  należy punkt

$A(-2, -6)$ , wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaci ogólnej.

**3.238.** Ułóż równanie kwadratowe, którego rozwiązaniami są liczby  $x_1$  i  $x_2$  spełniające warunki:

a)  $x_1 + x_2 = 2$  oraz  $x_1^2 + x_2^2 = 16$       b)  $x_1 \cdot x_2 = 5$  oraz  $(x_1 - x_2)^2 = 37$

c)  $x_1 + x_2 = 5$  oraz  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 10$       d)  $x_1 \cdot x_2 = 4$  oraz  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$

e)  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{17}{4}$  oraz  $4(x_1 - x_2)^2 = 17$       f)  $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = x_1 + x_2 = 7$

**3.239.** Funkcja kwadratowa  $y = x^2 + x - c$  ma dwa miejsca zerowe  $x_1$  i  $x_2$ , które spełniają warunek  $|x_1 - x_2| = \sqrt{5}$ . Oblicz  $c$ .

**3.240.** Wykaż, że jeśli  $b > 1$  to funkcja kwadratowa  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx - b$  ma dwa

miejsca zerowe  $x_1$  i  $x_2$  spełniające warunek:  $|x_1 - x_2| > 2\sqrt{3}$ .

**3.241.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $a$  funkcja kwadratowa  $f(x) = 2x^2 + ax + 1$  ma dwa miejsca zerowe spełniające warunek  $|x_1 + x_2| > \sqrt{2}$ .

## Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

**3.242.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których dane równanie ma dwa rozwiązania.

a)  $(m - 2)x^2 + (m + 5)x - m - 1 = 0$       b)  $(m + 2)x^2 - 2x + m + 2 = 0$

**3.243.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  dla których równanie

a)  $8(k^2 - 1)x^2 + (16k - 8)x + 1 = 0$  nie ma rozwiązań,

b)  $(k - 3)x^2 + (k - 2)x + 1 = 0$  ma tylko jedno rozwiązanie,

c)  $(k - 1)x^2 + (k + 1)x + k + 1 = 0$  ma rozwiązanie,

d)  $(k^2 - 3k + 2)x^2 + 3(k - 2)x + 4,5 = 0$  ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

- 3.244. Wyznacz liczbę rozwiązań równania ze względu na wartość parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . Napisz wzór funkcji  $g$ , która każdej rzeczywistej wartości parametru  $p$  przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania. Narysuj wykres funkcji  $g$ .
- a)  $(p-5)x^2 - 6px + p - 2 = 0$       b)  $(2p-3)x^2 + 4px + p - 1 = 0$

- 3.245. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których dana nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą  $x$ .

- a)  $x^2 + (m+2)x + 8m - 1 > 0$       b)  $2x^2 + (3+m)x + 2 < 0$   
 c)  $(4-m)x^2 - 3x + m + 4 < 0$       d)  $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 < 0$

- 3.246. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R}$ , jeśli:

- a)  $f(x) = \sqrt{kx^2 + 4kx + k - 3}$       b)  $f(x) = \sqrt{(k-k-6)x^2 + k-2)x + 1}$

- 3.247. Dla jakich wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , wartość funkcji  $f(x) = (2k+1)x^2 + (k-1)x + 3k$  jest mniejsza od wartości funkcji  $g(x) = (1-k)x + 3$  dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ ?

- D 3.248. Wykaz, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i każdej liczby rzeczywistej  $k$  prawdziwa jest nierówność  $2x^2 - kx + 2 > 3x - k^2$ .

- D 3.249. Wykaz, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i każdej liczby rzeczywistej  $m$  prawdziwa jest nierówność  $4x^2 - 2mx + m^2 > 6x + 3m - 9$ .

- 3.250. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dla których dane równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste przeciwnych znaków.

- a)  $x^2 + 2,0 = 1)x + 9a - 5 = 0$       b)  $2x^2 - 3(a-1)x + 1 - a = 0$

- 3.251. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dla których dane równanie ma dwa rozwiązania i oba są dodatnie.

- a)  $x^2 - 2cx + 4 - c^2 = 0$       b)  $x^2 + (2c+4)x + c^2 - 2c - 3 = 0$

- 3.252. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których dane równanie ma dwa rozwiązania i oba są ujemne.

- a)  $x^2 + mx - m + 3 = 0$       b)  $x^2 + 5mx + 4m^2 - 3m = 0$

- 3.253. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których dane równanie ma dwa rozwiązania jednakowych znaków.

- a)  $x^2 + 2(k+4)x + k^2 - 2k = 0$       b)  $2x^2 + (k-9)x + k^2 + 3k + 4 = 0$

- 3.254. Dla jakich wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $kx^2 + (k+1)x - 2k + 3 = 0$  spełniają warunek  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = k+1$ ?

- 3.255. Dla jakich wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  suma odwrotności różnych rozwiązań równania  $x^2 + kx - 16 = 0$  jest równa  $-4$ ?

- 3.256. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 + 5px + 20p - 8 = 0$  spełniają warunek  $x_1 + x_2 = 400$ .

- 3.257. Dla jakich wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$  równanie  $x^2 - 2(p-1)x + p^2 - 4 = 0$  ma dwa rozwiązania, których suma kwadratów jest mniejsza od 12?

- 3.258. Dla jakich wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$  suma kwadratów różnych rozwiązań równania:

- a)  $x^2 + (m-2)x = m+1$  jest najmniejsza?  
 b)  $x^2 + m(m-x) = 3m+2$  jest największa?

- 3.259. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ , dla których różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 + (k-1)x + 1 = 0$  spełniają warunek  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq 2k^2 - k - 21$ .

- D 3.260. Wykaz, że jeśli różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 - px + p + 8 = 0$  spełniają warunek  $x_1x_2(x_1+x_2) \geq x_1+x_2 - 6$ , to  $p \in (-\infty, -6) \cup (8, +\infty)$ .

- D 3.261. Wykaz, że jeśli różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 + (2m-3)x + 2m+5 = 0$  spełniają warunek  $x_1 + x_2 = 3m - 17m - 7$  to  $m \in \left[1, \frac{1}{2}\right]$ .

- 3.262. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których kwadrat różnicy różnych rozwiązań równania  $0,5x^2 + (p+1)x + 2 = 0$  jest nie większy od 84.

- 3.263. Dla jakich wartości parametru  $k$  różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 - (k+1)x + k = 0$  spełniają warunek  $(x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = 16$ ?

- 3.264. Dla jakich wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 - 2(k-1)x + 2k+1 = 0$  spełniają warunek  $3(x_1x_2 + x_1x_2 + 6) \leq x_1^2 + x_2^2$ ?



**3.265.** Dla jakich wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , każde z rozwiązań równania  $x^2 - 6ax + 2 = 2a - 9a^2$  jest większe od 3?

**3.266.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których każde z dwóch rozwiązań równania  $x^2 - (2p - 3)x + p = 0$  jest mniejsze od  $p$ .

**3.267.** Dane jest równanie  $x^2 - kx - k = 0$  z niewiadomą  $x$  i parametrem  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

a) Rozwiąż to równanie w przypadku, gdy  $k = -1\frac{1}{3}$ .

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ , dla których wszystkie rozwiązania równania należą do przedziału  $(-\infty, 2)$ .

**3.268.** Dla jakich wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , funkcja kwadratowa  $y = x^2 - 2x + k$  ma dwa miejsca zerowe  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $7x_1 - 4x_2 = 4$ ?

**3.269.** Dla jakich wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$  spełniają warunek  $x_1 = 2x_2$ ?

**3.270.** Dane jest równanie  $x^2 - mx - 2 = 0$  z niewiadomą  $x$  i parametrem  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

a) Rozwiąż to równanie w przypadku, gdy  $m = 2\sqrt{2}$ .

b) Dla jakich wartości parametru  $m$  wszystkie rozwiązania tego równania należą do przedziału  $(0, 3)$ ?

**3.271.** Dla jakich wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $2x^2 - 2(2m + 1)x + m(m - 1) = 0$  spełniają warunek  $x_1 < m < x_2$ ?

**3.272.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $x^2 - 2m + 4x + m + m - 2 = 0$  ma dwa rozwiązania, z których jedno należy do przedziału  $(0, 2)$ , a drugie do przedziału  $(3, 5)$ .

**3.273.** Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = (x - 3p)(x - p - 3)$ , gdzie  $p$  jest parametrem,  $p \in \mathbb{R}$ .

a) Dla  $p = \frac{1}{3}$  rozwiąż nierówność  $f(x) < 0$ .

b) Dla jakich wartości parametru  $p$  funkcja  $f$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  należącej do przedziału  $[1, 3]$ , przyjmuje wartości ujemne?

**3.274.** Napisz wzór i naszkuj wykres funkcji  $g$ , która każdej liczbie rzeczywistej  $m$  przyporządkowuje największą wartość funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 + (m - 1)x + 3$  w przedziale  $[-1, 1]$ .

**3.275.** Napisz wzór funkcji  $g$ , która każdej liczbie rzeczywistej  $k$  przyporządkowuje najmniejszą wartość funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 + kx - k$  w przedziale  $[0, 2]$ .

**3.276.** Dla jakich wartości parametru  $m$  różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 + 2x + m - 1 = 0$  spełniają warunek  $|x_1| + |x_2| \leq 3$ ?

**3.277.** Dla jakich wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 + x + m - 4 = 0$  spełniają warunek  $|x_1| + |x_2| > 2$ ?

**3.278.** Dla jakich wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $5x^2 - mx + 1 = 0$  spełniają warunek  $|x_1 - x_2| \geq 1$ ?

**3.279.** Dane jest równanie z niewiadomą  $x$  i parametrem  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Zbadaj liczbę rozwiązań tego równania w zależności od  $m$ .

a)  $3 + 2x - x^4 = m$

b)  $x^3 - 3x - 1 = m$

c)  $|x^2 - 4| = m^2 + 3$

d)  $-\frac{1}{3}x^2 + 2|x| = 3(m + 1)$

e)  $x^2 + 4|x| + 3 = m$

f)  $2|x| - x^2 = k^2 - 2$

**3.280.** Dla jakich wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dane równanie z niewiadomą  $x$  ma dwa rozwiązania?

a)  $x|x - 1| = a + 1$

b)  $|x^2 - 4| = a + 1$

**3.281.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $x^2 + 6x + 8| - (m + 2)$  ma dwa rozwiązania i są one przeciwnych znaków.

**3.282.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $(1 - |x + 1|)^2 = c^2 - 2$  ma trzy rozwiązania.

**3.283.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których zbiór rozwiązań nierówności  $|1 - x^2| \leq 3 - k$  zawiera się w przedziale  $(-2, 2)$ .

**3.284.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dla których niepusty zbiór rozwiązań nierówności  $|x - 1| + x - 5 < a$  zawiera się w przedziale  $[0, 6]$ .

**3.285.** Dla jakich wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , równanie  $x^4 - (a + 1)x + 1 = 0$  ma cztery rozwiązania?

**3.286.** Dla jakich wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , równanie  $(x - 2)^2 = p^2 - 3p$  ma cztery rozwiązania?

3.287. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$  dla których równanie  $x^2 + 2(p - 3)x = 1$  ma trzy rozwiązania. Dla znalezionych wartości  $p$  podaj te rozwiązania.

3.288. Dla jakich wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$  równanie  $2x^2 - mx + m - 2 = 0$  ma dwa rozwiązania?

### Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Wykresem funkcji kwadratowej  $y = 2x^2 - 3$  jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych:

- A.  $(2, -3)$       B.  $(-3, 0)$       C.  $(1, -3)$       D.  $(0, -3)$

2. Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej  $y = \frac{1}{4}x^2 + 3x - 8$  jest prosta o równaniu:

- A.  $x = 6$       B.  $y = -6$       C.  $x = 1,5$       D.  $y = 6$

3. Funkcja kwadratowa  $y = -2x(x - 8)$  jest rosnąca w przedziale:

- A.  $(4, +\infty)$       B.  $(-\infty, 8)$       C.  $(-\infty, 4)$       D.  $(8, +\infty)$

4. Wykres funkcji  $y = 9 - 2(x + 1)^2$  przecina oś  $OY$  w punkcie o rzędnej:

- A. 11      B. 10      C. 7      D. 2

5. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności  $(3 - x)(x + 2) \geq x + 2$

- A.  $(-\infty, 2)$       B.  $(-2, 2)$       C.  $(-2, +\infty)$       D.  $(-2, 3)$

6. Suma miejsc zerowych funkcji  $y = (x - 1)^2 - 16$  jest równa:

- A. 2      B. 8      C. -2      D. -8

7. Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej  $y = 3(x - 2)(x + 6)$  jest równa:

- A. -48      B. -36      C. -30      D. -12

8. Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe  $-\sqrt{2}$  oraz  $2\sqrt{2}$ . Wówczas iloraz

$$\frac{f(1)}{f(2)}$$

- A.  $\frac{1}{2} - 3\sqrt{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       C.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$       D.  $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$

9. Średnia arytmetyczna miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $y = 2x^2 + bx + c$  jest równa 1, a zbiorem wartości tej funkcji jest przedział  $[-4, 0]$ . Zatem

- A.  $b + c = 8$       B.  $b + c = -8$       C.  $b + c = 16$       D.  $b + c = -16$

10. Wykres funkcji  $y = -x^2 - 5x$  przesunęto równolegle wzdłuż osi  $OX$  o 2 jednostki w prawo i otrzymano wykres funkcji  $f$ . Zatem funkcję  $f$  opisuje wzór

- A.  $f(x) = x^2 - x + 6$       B.  $f(x) = x^2 - x - 14$   
C.  $f(x) = x^2 - 9x - 14$       D.  $f(x) = x^2 - x - 4$

11. Wyróżnik funkcji kwadratowej jest równy 16, a współrzędne wierzchołka wykresu tej funkcji wynoszą  $(-1, 4)$ . Wskaż miejsca zerowe tej funkcji.

- A.  $-1$  i  $4$       B.  $1$  i  $-3$       C.  $-1$  i  $3$       D.  $1$  i  $-4$

12. Jedynym miejscem zerowym funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$  jest liczba 2, a do wykresu tej funkcji należy punkt  $P(-1, 18)$ . Zatem współczynnik  $a$  we wzorze funkcji  $f$  jest równy

- A.  $-\frac{1}{2}$       B. 2      C. -2      D.  $\frac{1}{2}$

### Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

13. Rozwiąż równania:

- a)  $-2(x + 10)^2 = 0$       b)  $\frac{x(x-1)}{2} = \frac{x-3}{5}$   
c)  $(2x^2 - 3)(2x^2 + 3) = 5x^2$       d)  $(x^2 - 3x)^2 = 4(x^2 - 3x)$

14. Rozwiąż nierówność

- a)  $7 - 2(x - 2) \leq 5x$       b)  $2x + 9 < 6\sqrt{2x}$   
c)  $3x(3x + 4) < 4(4 - 3x)$       d)  $\frac{x - 2x}{2} < x + 2$

15. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej  $y = 2x^2 - 4x + 5$  w przedziale  $(-2, 3)$

16. Dany jest wzór funkcji kwadratowej  $f(x) = -0,5x^2 + x + 4$ .

- Napisz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.
- Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f$ .
- Rozwiąż graficznie równanie  $f(x) = x + 2$ .

17. Wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + 6x + c$  jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne  $(-1, 0)$ .

- Oblicz  $a$  i  $c$ .
- Podaj zbiór wartości funkcji, opisaną wzorem  $y = 8 - f(x)$ .
- Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość większą, niż funkcja  $g(x) = -2x - 2$ .

18. Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe  $-3$  i  $1$ . Wykres funkcji  $f$  przecina oś  $OY$  w punkcie o rzędnej  $-\frac{1}{2}$ .

- Wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaci iloczynowej.
- Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji  $f$ .
- Jakie miejsca zerowe ma funkcja  $y = f(-x) + \frac{1}{2}$ ?

19. Funkcja kwadratowa  $f(x) = ax^2 + bx + c$  gdzie  $a \neq 0$ , przyjmuje wartość ujemną wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ . Największa wartość funkcji  $f$  jest równa 1.

- Podaj równanie osi symetrii wykresu funkcji  $f$ .
- Oblicz  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
- Napisz w postaci ogólnej wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji  $f$  o 3 jednostki w lewo i 4 jednostki do góry.

20. Ojciec i córka mają razem 100 lat. 15 lat temu iloczyn ichby lat córki i ojca był równy 1029. Ile lat ma obecnie ojciec, a ile córka?

21. Suma cyfr liczby trzycyfrowej, wynosi 8, zaś suma kwadratów jej cyfr, jest równa 30. Jeśli w liczbie zamienimy cyfry skrajne, to otrzymana liczba będzie o 396 większa od początkowej. Wyznacz tę liczbę trzycyfrową.

22. Na spotkaniu towarzyskim każdy uczestnik spotkania przywita się z każdym z pozostałych uczestników uściskiem dłoni. Ile co najmniej osób brało udział w tym spotkaniu, jeżeli wymieniono więcej niż 45 uścisków dłoni?

23. Długość przekątnych rombu wyrażają się liczbami pierwszymi, różniącymi się o 2. Wiedząc, że pole tego rombu jest mniejsze od  $17\frac{1}{2}$ , oblicz jego obwód.

24. W małym zakładzie krawieckim są szyte koszulki, które sprzedaje się do hurtowni po 86 zł za sztukę. Związek między kosztem produkcji  $K(x)$  a liczbą  $x$  uszytych koszulek w ciągu dnia wyraża wzór  $K(x) = 4x^2 - 2x + 84$ . Zakład może uszyć dziennie maksymalnie 18 koszulek.

- Oblicz, ile co najmniej koszulek dziennie powinien szyć ten zakład, aby osiągnął zysk z ich sprzedaży.
- Oblicz, ile koszulek dziennie powinien szyć ten zakład, aby jego dzienny zysk był największy. Jaka jest wartość największego dziennego zysku?

25. Długość 2 m trzeba podzielić na dwa kawałki, z jednego powstanie ramka kwadratowa, a z drugiego ramka prostokątna, której długości boków pozostają w stosunku 2 : 3. Jaką długość powinien mieć każdy z tych kawałków drutu, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

D 26. Wykaż, że jeśli wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2bx - 8$  znajduje się w układzie współrzędnych pod osią  $OX$ , to  $b \in (-2, 2)$ .

D 27. Wykaż, że jeśli zbiór wartości funkcji kwadratowej  $y = x^2 + 2kx - 3$  jest przedziałem  $(-\infty, 1)$ , to  $k = -2$  lub  $k = 2$ .

D 28. Wykaż, że jeśli  $a - 2b = 3$ , to  $a^2 + b^2 \geq \frac{9}{5}$ .

D 29. Wykaż, że równanie  $2x^2 - (k + 1)x - 2 = 0$  ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy  $k \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$ .

D 30. Wykaż, że nierówność  $2x^2 - (k + 3)x + 8 = 0$  jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą  $x$  tylko wtedy, gdy  $k \in (-11, 5)$ .

31. Rozwiąż równanie:

- $|x^2 - 2x| + 1 = 4$
- $|x^2 - x - 3| + x + 1 = 0$
- $|-x^2 + x - 1| = |2x - 3 - x^2|$
- $|x^2 - 4| = |9 - x^2| = 5$

32. Rozwiąż algebraicznie i graficznie nierówność  $y = 5x^2 + 2i > 2$ .

33. Rozwiąż nierówność

a)  $(|x-5|)(|x-7|) \geq 0$

b)  $|2x^2 - 6x| < x - 3$

34. Rozwiąż.

a) równanie  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{5-x} = 4\sqrt{x}$

b) nierówność  $\sqrt{2x-x+6} \geq 3x$

35. Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe  $x_1, x_2$  spełniające dwa warunki.

$$x_1 + x_2 = 5 \text{ oraz } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{6}$$
 Wiedząc, że zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział

$$\left[\frac{1}{12}, \frac{1}{2}\right] \text{ wyznaczyć wzór funkcji } f \text{ w postaci iloczynowej}$$

36. Rozwiązaniem równania  $x^2 - (p+q)x + p+q = 0$  z niewiadomą  $x$  są liczby  $5+\sqrt{23}$  oraz  $5-\sqrt{23}$ . Oblicz  $p$  i  $q$ .37. Funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 - 5x + c$  ma dwa miejsca zerowe będące liczbami naturalnymi. Oblicz  $c$ . Podać wszystkie możliwe rozwiązania. Dla wyznaczonej liczby  $c$  podać miejsca zerowe funkcji  $f$ .38. Wykaż, że jeśli liczby  $x_1, x_2$  są rozwiązaniami równania  $x^2 - x - 3 = 0$ , to  $x_1^4 + x_2^4 = 33$ .39. Dane jest równanie  $(x-k)x + (k-1)x + (k+1) = 0$  z niewiadomą  $x$  parametrem  $k, k \in \mathbb{R}$ . Napisz wzór funkcji  $f$  która każdej liczbie rzeczywistej,  $k$  przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.40. Na podstawie wykresu funkcji  $f(x) = x^2 - x - 4$  wyznaczyć wszystkie wartości parametru  $m, m \in \mathbb{R}$  dla których równanie  $x^2 - x - 4 = m^2 - 1$  ma co najmniej dwa rozwiązania.41. Dla jakich wartości parametru  $m$  suma dwóch różnych rozwiązań równania  $x^2 - 2m(x-1) - 1 = 0$  jest nie mniejsza od sumy kwadratów tych rozwiązań?42. Dla jakich wartości parametru  $p$  funkcja kwadratowa  $y = x^2 - px + 3 + p$  ma dwa różne miejsca zerowe  $x_1, x_2$  takie, że  $x_1 = 1 + x_2$ ?43. Dla jakich wartości parametru  $p$  równanie  $2x^2 - (p+1)x + p+1 = 0$  ma dwa różne rozwiązania  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $|x_1 - x_2| = 1,5$ ?44. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru  $a, a \in \mathbb{R}$  dla których każde z rozwiązań równania  $x^2 - (2+a)x + a^2 = 0$  jest mniejsze od  $2a$ .45. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru  $k, k \in \mathbb{R}$  dla których funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 - 4(k+1)x + 2k(k-1)$  ma dwa miejsca zerowe  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $x_1 < k < x_2$ .46. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru  $a, a \in \mathbb{R}$  dla których dziedziną funkcji  $y = \sqrt{a-1-x} + 2(a-1)x + 2$  jest zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .47. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru  $a, a \in \mathbb{R}$  dla których nierówność  $(a-1)x + (2-2a)x + a-2 \leq (2-3a)x - 2$  jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą  $x$ .48. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru  $p, p \in \mathbb{R}$  dla których równanie  $x^2 + p = 4|x| - 1$  ma dwa rozwiązania.



# 4. Geometria płaska – okręgi i koła

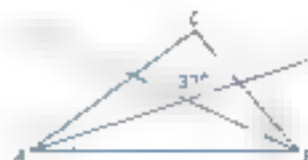
## Powtórzenie wiadomości z geometrii z klasy 1

4.1 Wyznacz miary dwóch kątów przyległych, jeśli jeden z nich jest cztery razy większy od drugiego.

4.2 Punkt  $O$  jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów  $\angle CAB$  i  $\angle ABC$  w trójkącie  $ABC$ . Wyznacz miarę kąta wewnętrznego  $\angle AOB$ , jeśli:

- a)  $|\angle BAC| + |\angle ABC| = 130^\circ$       b)  $|\angle ACB| = 100^\circ$

4.3. W trójkącie  $ABC$  poprowadzono dwusieczne kątów przy wierzchołkach  $A$  i  $B$ . Kąt rozwarty przecięcia się tych dwusiecznych jest równy  $137^\circ$ . Oblicz miarę kąta  $\angle ACB$ .

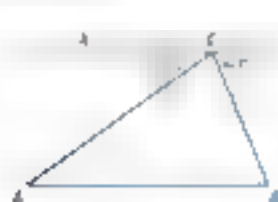


4.4. Na rysunku obok zaznaczone są kąty zewnętrzne trójkąta  $\alpha$ ,  $\beta$ . Wiedząc że  $\alpha + \beta = 217^\circ$ , oblicz  $\beta$ .



4.5. Dany jest trójkąt  $ABC$  oraz prosta  $k$  równoległa do podstawy  $AB$  przechodząca przez wierzchołek  $C$ . Na podstawie danych na rysunku poniżej, wyznacz kąty trójkąta  $ABC$ .

a)



b)



4.6 Dany jest kąt ostry  $\angle BAC < \angle BAC' = 39^\circ$  oraz punkt  $P$  leżący na zewnątrz tego kąta. Z punktu  $P$  poprowadzono dwie proste: jedną równoległą do ramienia  $AB$ , a drugą prostą do ramienia  $AC$ . Oblicz miarę kąta ostrego przecięcia się tych prostych.

D 4.7 Wykaz, że w dowolnym trapezie dwusieczne kątów przy tym samym ramieniu są do siebie prostopadłe.

D 4.8 Korzystając z danych na rysunku poniżej, wykaz, że czworokąt  $ABCD$  jest trapezem.

a)



b)



4.9. Na rysunkach poniżej proste  $a$  i  $b$  są równoległe. Oblicz  $x$ .

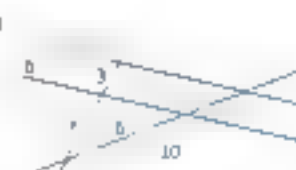
a)



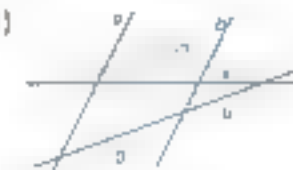
b)



c)



d)



e)



f)



4.10. Proste  $AB$  i  $A_1B_1$  przecinają się w punkcie  $O$ . Proste te przecięto prostymi równoległymi  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  – jak na rysunku obok. Oblicz

a)  $|\angle CC_1|$ , jeśli  $|\angle C_1O| = 4^\circ$ ,  $|\angle OA| = 3^\circ$ ,  $|\angle AA_1| = 2^\circ$

b)  $|\angle CC_1|$ , jeśli  $|\angle OA_1| = 1,8^\circ$ ,  $|\angle AC_1| = 11,2^\circ$ ,  $|\angle OC| = 5,4^\circ$

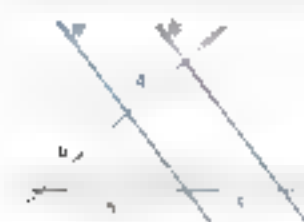
c)  $|\angle OB|$ , jeśli  $|\angle CC_1| = 4^\circ$ ,  $|\angle BB_1| = 56^\circ$ ,  $|\angle C_1B| = 12^\circ$

d)  $|\angle CA_1|$ , jeśli  $|\angle AA_1| = 2^\circ$ ,  $|\angle BB_1| = 5^\circ$ ,  $|\angle A_1B_1| = 4,5^\circ$ ,  $|\angle CC_1| = 4^\circ$



4.11. Czy na rysunku poniżej, proste  $a$  i  $b$  są równoległe? Odpowiedz uzasadnij.

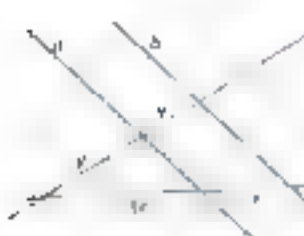
a)



b)



c)



d)



4.12. Wyznacz wszystkie liczby  $a$ ,  $a > 0$ , dla których istnieje trójkąt o bokach mających długość

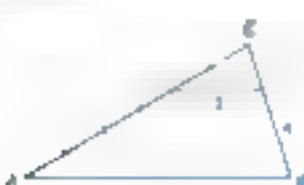
- a)  $a, 4, 8$       b)  $a, a - 3, a - 6$       c)  $2a - 7, 11 - a$

4.13. Dwa boki trójkąta mają długość 4 i 9. Długość  $c$  trzeciego boku wyraża się liczbą pierwszą.

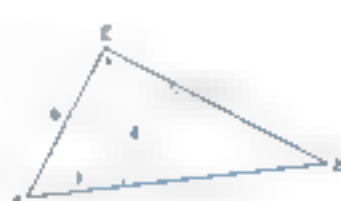
- a) Oblicz  $c$ . Podaj wszystkie możliwe rozwiązania.  
b) Wykaz, że dla każdej liczby  $c$  znalezionej w punkcie a) trójkąt jest rozwartokątny.

4.14. Na podstawie danych na rysunku poniżej, oblicz długość podstawy  $AB$  trójkąta  $ABC$ .

a)

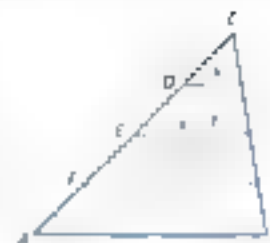


b)

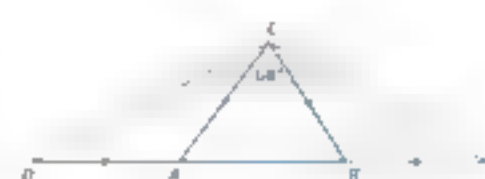


4.15. Długości boków trójkąta  $ABC$  porostają w stosunku 2 : 3 : 4. Środek boków tego trójkąta wyznaczają trójkąt, którego obwód jest równy 13,5 cm. Oblicz długość boków trójkąta  $ABC$ .

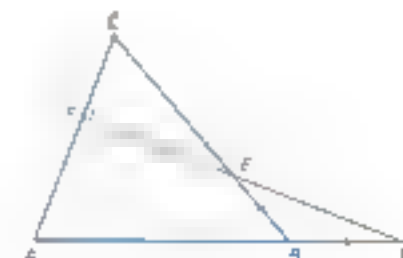
4.16. Punkty  $D, E, F$  dzielą bok  $AC$  trójkąta  $ABC$  na cztery odcinki równej długości. Przez punkty  $D, E, F$  poprowadzono odcinki równoległe do boku  $AB$ , których drugi koniec należy do boku  $BC$ . Wiedząc, że najkrótszy z tych odcinków jest krótszy od kolejnego odcinka o 7 cm, oblicz długość boku  $AB$  i długości równoległych odcinków.



4.17. W trójkącie równoramiennym  $ABC$  kąt  $ACB$  jest równy  $68^\circ$ . Na prostej  $AB$  zaznaczono punkty  $D$  i  $E$  w taki sposób, że  $|DA| = |AC|$  oraz  $|BC| = |BE|$ . Oblicz kąty trójkąta  $COE$ .



4.18. Punkt  $D$  leży na przedłużeniu boku  $AB$  trójkąta  $ABC$  poza punkt  $B$ . Z punktu  $D$  poprowadzono prostą prostopadłą do boku  $AC$ , która przecięła bok  $BC$  w punkcie  $E$ . Wykaz, że jeśli  $|BD| = |BE|$  to trójkąt  $ABC$  jest równoramienny.



4.19. Wysokość trójkąta równobocznego jest o 2 krótsza od boku.

- a) Oblicz długość boku tego trójkąta. Wynik przedstaw w postaci  $a \cdot b\sqrt{c}$ , gdzie  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .  
b) Jak obwód ma trójkąt, którego wierzchołkami są środki boków danego trójkąta?

4.20. W trójkącie prostokątnym równoramiennym najkrótsza wysokość ma długość 2 cm.

- a) Oblicz długości boków tego trójkąta.  
b) Punkt  $M$  należy do przeciwprostokątnej tego trójkąta i dzieli ją w stosunku 1 : 3. Oblicz odległości punktu  $M$  od przyprostokątnych.

4.21. Kąty  $\alpha, \beta, \gamma$  trójkąta różnią się kolejno o  $30^\circ$ .

- a) Wykaz, że trójkąt jest prostokątny.  
b) Oblicz obwód tego trójkąta wiedząc, że różnica długości najdłuższego i najkrótszego boku tego trójkąta jest równa 4 cm. Wynik zaokrąglij, do pierwszego miejsca po przecinku.

4.22. Boki trójkąta mają długość: 20 cm, 16 cm, 12 cm.

D a) Wykaż, że trójkąt jest prostokątny.

b) Oblicz sumę długości wszystkich wysokości tego trójkąta.

4.23. Stosunek długości krótszych boków trójkąta prostokątnego jest równy  $\frac{3}{4}$ . Wiedząc, że obwód tego trójkąta wynosi 36 cm, oblicz:

a) długości boków tego trójkąta,

b) długość środkowej trójkąta poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

4.24. Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm.

a) Sprawdź, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

b) Oblicz długości trzech wysokości tego trójkąta.

4.25. W trójkącie ABC boki mają długość  $|AB| = 18$  cm,  $|BC| = |AC| = 15$  cm. Oblicz:

a) wysokość CD tego trójkąta,

b) długość środkowej AE,

c) długość odcinka DE.

4.26. Oblicz długości odcinków, na jakie środek ciężkości trójkąta dzieli środkową tego trójkąta poprowadzoną na podstawę, jeśli:

a) trójkąt jest równoboczny, a jego obwód jest równy 18,

b) trójkąt jest prostokątny równoramienny, a jego ramiona mają długość 3.

4.27. Boki trójkąta mają długość 9 cm, 12 cm, 15 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta:

a) od dwóch jego krótszych boków,

b) od wierzchołków tego trójkąta.

4.28. Oblicz długości środkowych trójkąta, którego boki mają długość 16 cm, 17 cm, 17 cm.

D 4.29. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Punkt E jest środkiem odcinka AD. Prosta CE przecina bok AB w punkcie P. Wykaż, że  $|PB| = 2|AP|$ .

D 4.30. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Wykaż, że jeśli suma miar kątów DAC i ACB jest równa mierze kąta ADC, to trójkąt DBP jest równoramienny.

D 4.31. Trójkąt ABC jest równoboczny, a jego bok ma długość  $a$ ,  $a > 1$ . Punkt D należy do boku AC oraz  $|AD| = 1$ . Na przedłużeniu boku BC poza punkt C leży punkt P. Wykaż, że jeśli  $|CP| = 1$ , to trójkąt DBP jest równoramienny.

4.32. Boki trójkąta ABC mają długość 8 cm, 10 cm, 12 cm. Trójkąt  $A_1B_1C_1$  jest podobny do trójkąta ABC w skali  $\frac{1}{3}$ . Oblicz obwód trójkąta  $A_1B_1C_1$ .

4.33. Trójkąt  $A_1B_1C_1$  jest podobny do trójkąta ABC w skali 1,25. O ile procent obwód trójkąta ABC jest mniejszy od obwodu trójkąta  $A_1B_1C_1$ ?

4.34. Boki trójkąta ABC mają długość  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ ,  $|AB| = c$ . Trójkąt  $A_1B_1C_1$  jest podobny do trójkąta ABC, a jego boki mają odpowiednio długość  $|B_1C_1| = a + 4$ ,  $|A_1C_1| = b + 5$ ,  $|A_1B_1| = c + 8$ .

D a) Wykaż, że  $a + b + c = 2 + 3 + 4$ .

b) Wiedząc dodatkowo, że obwód trójkąta ABC jest równy 27 cm, oblicz skalę podobieństwa trójkąta  $A_1B_1C_1$  do trójkąta ABC.

4.35. Boki trapezu ABCD,  $AB \parallel DC$  mają długość  $|AB| = 21$  cm,  $|BC| = 8$  cm,  $|DC| = 14$  cm,  $|AD| = 5$  cm. Proste AD i BC przecinają się w punkcie P. Oblicz obwód trójkąta ABP.

4.36. Podstawy trapezu mają długość 4 cm i 12 cm, a jego przekątne mają długość 10 cm oraz 8 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie punkt przecięcia przekątnych dzieli te przekątne.

4.37. W trójkącie równoramiennym boki mają długość 18 cm, 15 cm, 15 cm.

a) Oblicz odległość środka wysokości poprowadzonej na podstawę od boków tego trójkąta.

b) Jaka jest odległość spodka tej wysokości od ramion trójkąta?

4.38. Najkrótsza wysokość trójkąta prostokątnego jest równa 8 cm, a najdłuższa wynosi  $13\frac{1}{2}$  cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

4.39. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona na przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki, których długości poróżniają w stosunku 9 : 16. Wiedząc, że obwód trójkąta jest równy 30 cm, oblicz długości przyprostokątnych.

**4.40.** W trójkącie  $ABC$ , w którym  $\angle C = 90^\circ$  oraz  $AC = 12$ ,  $BC = 16$  zaznaczono środek ciężkości  $S$  i spodek  $D$  wysokości  $CD$ .

**D 4.40.** Wykaż, że jeśli  $AD = 3$  oraz  $BD = 6$  to odcinek  $DS$  jest równoległy do boku  $AC$ , a jego długość jest równa  $\sqrt{3}$ .

b) Czy odcinek  $DS$  byłby równoległy do boku  $AC$  gdyby  $AD = 1$  oraz  $BD = 4$ ? Odpowiedź uzasadnij.

**D 4.41.** W trójkącie  $ABC$  bok  $AB$  jest najdłuższy. Na boku  $AB$  zaznaczamy punkty  $C_1, C_2$  w tak sposób, że  $AC_1 = AC$  oraz  $BC_2 = BC$ . Wykaż, że jeśli  $\angle C_1CC_2 = 40^\circ$  to  $\angle ACB = 100^\circ$ .

**D 4.42.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) poprowadzono wysokość  $CD$ . Wykaż, że:

a)  $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$                       b)  $|BC|^2 = |AB| \cdot |DB|$

**D 4.43.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  symetralna przeciwprostokątnej  $BC$  przecina przyprostokątną  $AB$  w punkcie  $P$ . Wykaż, że jeśli  $|AP| : |PB| = 1 : 3$ , to  $|AC| : |BC| = 1 : \sqrt{3}$ .

**D 4.44.** W trójkącie  $ABC$  poprowadzono środki  $BD, CE$  które przecięły się w punkcie  $S$ . Wykaż, że:

a) półprosta  $AS$  dzieli odcinek  $DE$  na połowy,

b) prosta równoległa do odcinka  $DE$  przechodząca przez punkt  $S$  dzieli bok  $AB$  i  $AC$  w stosunku  $2 : 1$ , licząc od wierzchołka  $A$ ,

c) odległość punktu  $S$  od dowolnego boku jest równa  $\frac{1}{3}$  wysokości poprowadzonej na ten bok.

**D 4.45.** W trapezie  $ABCD$  podstawy  $AB, DC$  mają odpowiednio długość  $a, b$  gdzie  $a < b$ . Ramiona  $AD, BC$  przedłużono do punktu  $P$ . Punkty  $E, F$  są odpowiednio środkami ramion  $AD, BC$ .

a) Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wykaż, że  $EF \parallel AB$ .

b) Korzystając z wniosku z twierdzenia Talesa wykaż, że  $|EF| = \frac{a+b}{2}$ .

c) Niech przekątne  $AC, BD$  przecinają odcinek  $EF$  odpowiednio w punktach  $K, L$ . Wykaż, że punkty  $K$  i  $L$  są środkami tych przekątnych oraz  $|KL| = \frac{a-b}{2}$ .

## Okrąg. Położenie prostej i okręgu

**4.46.** Narysuj okrąg i zaznacz na nim punkty  $A, B$  i  $C$ .

a) Ile cięciw i łuków wyznaczają te punkty? Wskaż te cięciwy i łuki.

b) Ile cięciw i łuków wyznaczają cztery punkty położone na okręgu?

**4.47.** W kole poprowadzono średnicę  $AB$  i cięciwę  $AC$ . Wiedząc, że  $BC \perp AC$  oraz  $|BC| = 7$  cm, oblicz odległość cięciwy  $AC$  od środka koła.

**4.48.** Odcinek  $AB$  jest cięciwą okręgu o promieniu  $25$  cm. Wiedząc, że  $|AB| = 48$  cm, oblicz odległość tej cięciwy od środka okręgu.

**4.49.** Promień okręgu jest równy  $17$  m. Oblicz długość cięciwy tego okręgu, która znajduje się w odległości  $8$  cm od środka okręgu.

**4.50.** Cięciwa  $CD$  okręgu jest równoległa do średnicy  $AB$ , a odległość między nimi jest równa  $5$  cm. Wiedząc, że różnica długości tych cięciw jest równa  $2$  cm, oblicz długość tego okręgu.

**4.51.** Cięciwa  $CD$  okręgu jest prostopadła do średnicy  $AB$  przecinającą w punkcie  $P$  w stosunku  $9 : 1$ . Wiedząc, że odległość punktu  $P$  od środka okręgu jest równa  $4$  cm, oblicz:

a) długość okręgu

b) długość cięciwy  $CD$

**4.52.** Wyraz w procentach (z dokładnością do  $1\%$ ) jaką część okręgu stanowi łuk okręgu o promieniu  $r$ , jeśli długość łuku jest równa  $d$ .

a)  $r = 7$  cm,  $d = 1$  cm

b)  $r = 5$  cm,  $d = 20$  cm

c)  $r = \pi$  cm,  $d = \pi$  cm

d)  $r = 0,25$  m,  $d = 6$  cm

e)  $r = \sqrt{3}$  dm,  $d = \sqrt{12}\pi$  dm

f)  $r = 0,4$  m,  $d = \sqrt{5}\pi$  dm

**4.53.** Dany jest promień  $r$  okręgu o odległości  $d$  środka okręgu od prostej  $k$ . Ustal położenie prostej  $k$  oraz okręgu o:

a)  $r = 3$ ,  $d = 2\sqrt{3}$

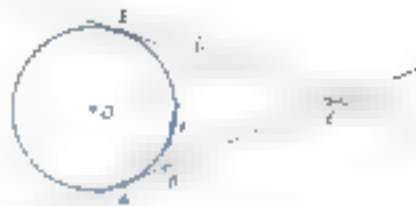
b)  $r = \pi$ ,  $d = 9\pi$

c)  $r = 7$ ,  $d = 4 + 3$

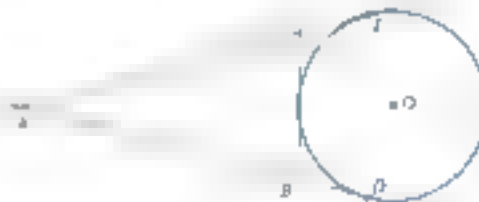
d)  $r = 0,8$ ,  $d = 3$



4.54. Wskaż na rysunku obok trzy pary odcinków równej długości wiedząc, że proste  $AC$ ,  $EC$ ,  $BD$  są styczne do okręgu odpowiednio w punktach  $A$ ,  $E$ ,  $F$ .



4.55. Proste  $AE$ ,  $AD$  i  $BC$  są styczne do okręgu. Wiedząc, że  $|AO| = 17$  cm, oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .



4.56. Okrąg na rysunku obok jest styczny do wszystkich boków trójkąta  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$  odpowiednio w punktach  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Wiedząc, że  $|AB| = 15$  cm oraz  $|BC| = 19,5$  cm, oblicz długość odcinka  $FC$ .



4.57. Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu jest równa  $\alpha$ . Pod jakim kątem widać ten okrąg z punktu przecięcia stycznych do okręgu, poprowadzonych z końców tych promieni, jeśli:

- a)  $\alpha = 45^\circ$       b)  $\alpha = 60^\circ$       c)  $\alpha = 100^\circ$       d)  $\alpha = 141^\circ$

4.58. Z punktu  $A$  poprowadzono dwie styczne do okręgu o środku  $O$  promienia 3 cm. Odcinek  $AO$  ma długość 9 cm i przecina okrąg w punkcie  $P$ . Oblicz odległość punktu  $P$  od tych stycznych.

4.59. Z punktu  $A$  poprowadzono dwie styczne do okręgu o środku  $O$  promienia  $r$ . Prosta  $AO$  przecina okrąg w dwóch punktach  $P$ ,  $Q$ . Wykaż, że jeśli odległość punktu  $Q$  od poprowadzonych stycznych jest dwa razy większa niż odległość punktu  $P$  od tych stycznych, to  $r = \frac{1}{2}|AP|$ .

4.60. Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce  $A$ ,  $B$  średnicy tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i o 15 cm. Oblicz promień tego okręgu.

4.61. Dany jest okrąg o promieniu  $r$  i prosta, której odległość od środka okręgu jest równa  $d$ . Zbadaj położenie prostej  $k$  i okręgu  $\sigma$  w zależności od  $a$ .

- a)  $r = 4$ ,  $d = a - 3$       b)  $r = a$ ,  $d = a - a$   
c)  $r = a$ ,  $d = 6 + a$       d)  $r = a - 1$ ,  $d = a + 1$

## Wzajemne położenie dwóch okręgów

4.62. Określ wzajemne położenie okręgów  $\sigma$  ( $A$ ,  $r_1$ ) i  $\sigma$  ( $B$ ,  $r_2$ ), jeśli  $|AB| = 8$  oraz:

- a)  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 9$       b)  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = 5$   
c)  $r_1 = \sqrt{5}$ ,  $r_2 = 3\sqrt{5}$       d)  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 13$   
e)  $r_1 = \sqrt{8}$ ,  $r_2 = 1$       f)  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = 4\sqrt{2}$

4.63. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie. Odległość między ich środkami wynosi 12 cm. Wyznacz promienie tych okręgów, wiedząc, że:

- a) jeden z nich jest o 2 cm dłuższy od drugiego,  
b) jeden z nich jest trzy razy krótszy od drugiego.

4.64. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie. Odległość między ich środkami jest równa 3 cm. Wyznacz promienie tych okręgów, jeśli:

- a) jeden z nich jest dwa razy krótszy od drugiego,  
b) suma długości promieni jest równa 17 cm.

4.65. Wyznacz promienie okręgów wiedząc, że gdyby te okręgi były styczne zewnętrznie to odległość między ich środkami byłaby równa 15 cm, a gdyby te okręgi były styczne wewnętrznie to odległość między ich środkami byłaby równa 3 cm. Wyznacz promienie tych okręgów.

4.66. Trzy okręgi o promieniu  $r$  są styczne zewnętrznie, każdy do dwóch pozostałych. Wyznacz długość boków miary kątów trójkąta utworzonego przez punkty styczności.

4.67. Dwa okręgi  $\sigma$  ( $A$ ,  $r_1$ ) i  $\sigma$  ( $B$ ,  $r_2$ ) są styczne zewnętrznie do siebie i obie są styczne wewnętrznie do okręgu  $\sigma$  ( $C$ ,  $r_3$ ). Obwód trójkąta  $ABC$  wynosi 25 cm. Oblicz  $r_1$ .

4.68. Dany jest dwa okręgi współśrodkowe. Cięciwa większego okręgu jest styczna do mniejszego okręgu, a jej długość jest równa 30 cm. Oblicz promienie tych okręgów, wiedząc, że różnią się o 9 cm.

4.69. Dane są dwa okręgi  $o(A, r_1)$ ,  $o(B, r_2)$  takie, że

- a)  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ ,  $|AB| = k$
- b)  $r_1 = k$ ,  $r_2 = k + 1$ ,  $|AB| = 5$
- c)  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = 2k$ ,  $|AB| = 4$
- d)  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = k$ ,  $|AB| = 1$

Określ położenie okręgów w zależności od wartości parametru  $k$ .

4.70. Dane są dwa okręgi  $o(A, 3)$  oraz  $o(B, m - 4)$ . Odległość między ich środkami jest równa 7. Wyznacz wszystkie wartości  $m$ , dla których te okręgi mają

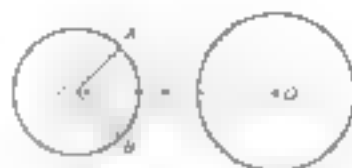
- a) jeden punkt wspólny
- b) dwa punkty wspólne.

4.71. Odległość między środkami dwóch okręgów jest równa 9, a promienie tych okręgów są równe 5. Odróżnij te dwa okręgi. Wyznacz wszystkie wartości  $a$ , dla których oba okręgi mają co najmniej jeden punkt wspólny.

4.72. Dwa okręgi o promieniach równych 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie. Dwie proste z których każda jest styczną zewnętrzną obu okręgów przecinają się w punkcie  $A$ . Oblicz odległość punktu  $A$  od środka mniejszego okręgu.

4.73. Dane są dwa okręgi  $o(A, 8)$ ,  $o(B, 12)$ . Odcinek  $AB$  ma długość 25 i przecina się ze styczną wewnętrzną tych dwóch okręgów w punkcie  $C$ . Oblicz odległość punktu  $C$  od punktu  $B$ .

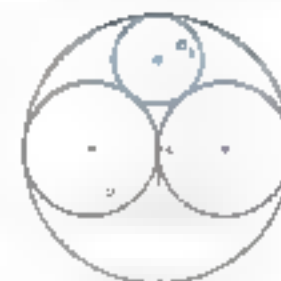
4.74. Dwa okręgi  $o(O_1, 1)$ ,  $o(O_2, 2)$  są rozłączne zewnętrznie. Punkty  $A$  i  $B$  są punktami styczności okręgu o środku  $O_2$  z dwiema stycznymi wewnętrznymi obu okręgów. Wiedząc, że  $O_1B \perp O_2A$ , oblicz  $|O_1O_2|$ .



4.75. Dwa okręgi o promieniach równych 5 i 8 są styczne zewnętrznie w punkcie  $P$ . Prosta  $k$  jest styczną zewnętrzną obu okręgów odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$ . Prosta  $l$  jest styczną wewnętrzną obu okręgów i przecina się z prostą  $k$  w punkcie  $C$ . Oblicz:

- a) długość odcinka  $AB$
- b) długość odcinka  $CP$

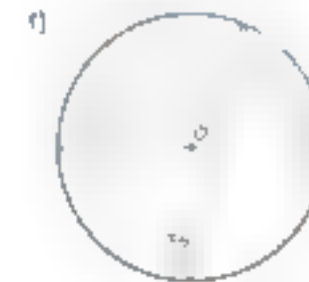
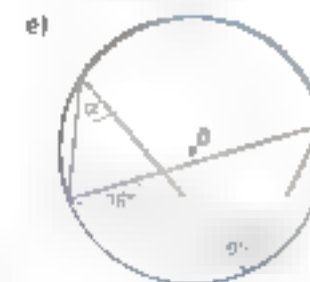
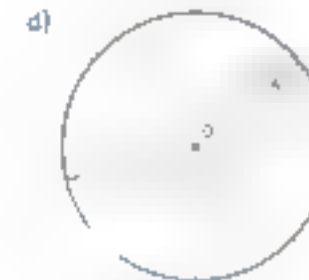
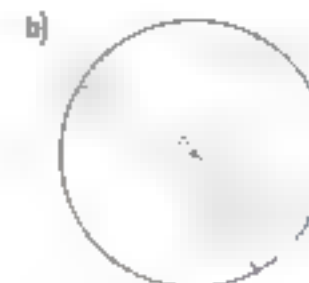
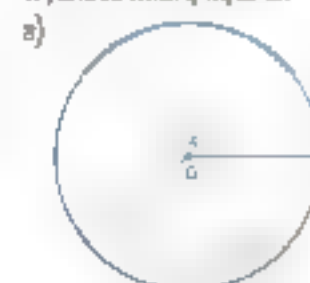
4.76. Na rysunku obok dwa przysłające okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne zewnętrznie w punkcie  $D$  i jednocześnie styczne wewnętrznie do okręgu  $o(O, r)$ . Wykaz, że okrąg  $o_M$  styczny zewnętrznie do okręgów  $o_1$ ,  $o_2$  i jednocześnie styczny wewnętrznie do okręgu  $o(O, r)$  ma promień równy  $\frac{r}{2}$ .



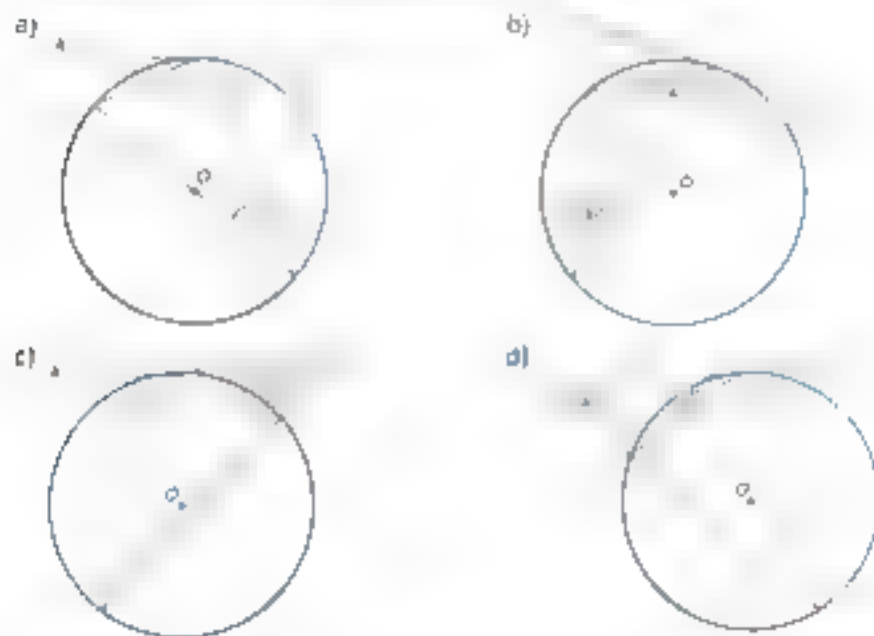
4.77. Przez punkt wspólny dwóch przecinających się okręgów o środkach  $O_1$  i  $O_2$  poprowadzono styczną ośrodkową do prostej  $O_1O_2$ . Przecięcie prostej  $O_1O_2$  z jedną z tych stycznych w punkcie  $A$ , natomiast drugiej – w punkcie  $B$ . Wykaz, że  $|O_1O_2| = \frac{4}{3}|AB|$ .

## Koła i kąty

4.78. Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$ . Korzystając z danych na rysunkach, wyznacz miarę kąta  $\alpha$ .



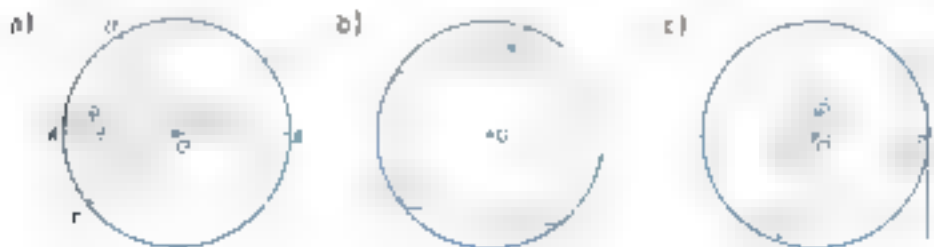
4.79. Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$ . Prosta  $k$  jest styczna do tego okręgu. Korzystając z danych na rysunku, wyznacz miarę kąta  $\alpha$ .



4.80. Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$ . Korzystając z danych na rysunku, wyznacz miary kątów trójkąta  $ABC$ .



4.81. Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$ . Korzystając z danych na rysunku, oblicz  $\alpha$ .



4.82. Oblicz miarę kąta środkowego, opartego na łuku okręgu o promieniu  $r$ , jeśli długość tego łuku jest równa  $d$ .

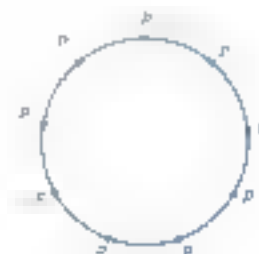
- a)  $r = 2$ ,  $d = \pi$       b)  $r = 3$ ,  $d = 2\pi$       c)  $r = 4$ ,  $d = 5\pi$   
 d)  $r = 5$ ,  $d = 3\pi$       e)  $r = 6$ ,  $d = 6$       f)  $r = 8$ ,  $d = 40$

4.83. Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$  i promieniu  $r$ . Oblicz długość łuku, na którym jest oparty kąt środkowy  $\alpha$  w tym okręgu, jeśli:

- a)  $r = 15$ ,  $\alpha = 72^\circ$       b)  $r = 10$ ,  $\alpha = 216^\circ$       c)  $r = 4$ ,  $\alpha = 135^\circ$   
 d)  $r = 28$ ,  $\alpha = 30^\circ$       e)  $r = 13$ ,  $\alpha = 270^\circ$

4.84. Punkty  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$  należą do okręgu, dzielą okrąg w danej kolejności na dziewięć łuków równej długości. Oblicz:

- a)  $\angle P_1 P_2 P_3$       b)  $\angle P_1 P_2 P_4$   
 c)  $\angle P_1 P_2 P_5$       d)  $\angle P_1 P_2 P_6$



4.85. W okręgu o promieniu  $r$  kreślimy średnicę  $AB$  oraz taką cięciwę  $AC$ , że  $|AC| = r$ . Jaką część okręgu jest łuk  $CAB$ ?

4.86. Punkty  $A, B, C$  należą do okręgu. Wiadząc, że kąty trójkąta  $ABC$  są równe  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 105^\circ$ , oblicz stosunek długości łuków, na jakie punkty

$A, B, C$  podzieliły okrąg.

4.87. Punkty  $A, B, C$  dzielą okrąg na trzy łuki, których stosunek długości wynosi  $5 : 6 : 7$ . Oblicz miary kątów trójkąta  $ABC$ .

4.88. Cięciwy  $AB$  i  $CD$  są różnymi średnicami jednego okręgu. Wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest prostokątem.

4.89. Wewnątrz równoległoboku narysowano dwa półokręgi: średnicą jednego - krótszy bok  $a$  i średnicą drugiego - dłuższy bok  $b$  równoległoboku. Wykaż, że punkt przecięcia tych półokręgów równy od wierzchołka równoległoboku należy do jednej z przekątnych tego równoległoboku.

4.90. Dwa okręgi przecinają się w punktach  $P$  i  $Q$ . Poprowadzono średnicę  $PA$  w pierwszym okręgu oraz średnicę  $PB$  w drugim okręgu. Wykaż, że punkty  $A, Q, B$  są współliniowe.

**D 4.91** Cięciwa  $CD$  okręgu jest równoległa do średnicy  $AB$ . Wykaż, że różnica miar kątów  $ACD$  i  $CDA$  jest równa  $90^\circ$ .

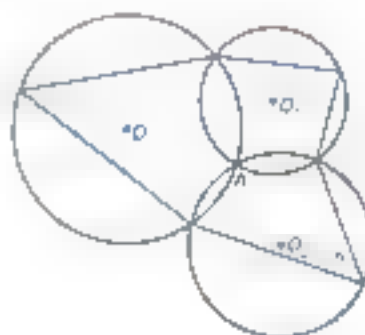
**D 4.92** Na rysunku obok dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$  oraz kąty środkowe:  $\alpha$  i  $\beta$ . Wykaż, że jeśli  $\alpha = 80^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$ , to  $OC \parallel AB$ .



**D 4.93** Dwa okręgi o równych promieniach przecinają się w punktach  $A$  i  $B$  w taki sposób, że jeden przechodzi przez środek drugiego. Przez punkt  $A$  poprowadzono sieczną tych okręgów, która przecina okrąg w punktach  $C$  i  $D$ . Wykaż, że punkty  $B$ ,  $C$ ,  $D$  są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

**D 4.94** Dane są dwa kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Wykaż, że dwusieczne tych kątów przecinają się w punkcie należącym do okręgu.

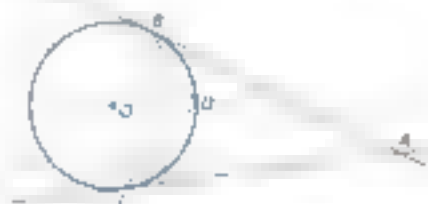
**D 4.95** Trzy okręgi o środkach  $O_1$ ,  $O_2$  i  $O_3$  przecinają się w punkcie  $A$ . W okręgach tych zaznaczono kąty wpisane  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – jak na rysunku obok. Wykaż, że  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .



**D 4.96** Cięciwy  $AB$  i  $CD$  okręgu przecinają się pod kątem  $45^\circ$ . Wykaż, że  $|\angle COA| + |\angle DOB| = 90^\circ$ .



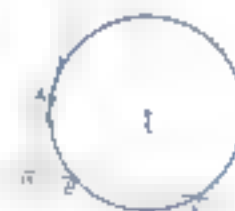
**D 4.97** Proste  $AB$  i  $AC$  są styczne w punktach  $B$  i  $C$  do okręgu o środku w punkcie  $O$ . Punkt  $D$  leży na łuku  $BC$ , wewnątrz trójkąta  $ABC$ , jak na rysunku poniżej. Wykaż, że suma  $|\angle ABD| + |\angle ACD|$  jest stała (tzn. nie zależy od położenia



punktu  $D$  na łuku  $BC$ ). Czy teża będzie prawdziwa, jeśli punkt  $D$  będzie leżał na łuku  $BC$  na zewnątrz trójkąta  $ABC$ ?

## Twierdzenie o stycznej i siecznej

**4.98** Z punktu  $P$  poprowadzono styczną do okręgu w punkcie  $A$  oraz sieczną, przecinającą okrąg w punktach  $B$  i  $C$  jak na rysunku obok. Wiedząc, że  $|PB| = 1$  cm oraz  $|BC| = 8$  cm, oblicz  $|PA|$ .



**4.99** Przez punkt  $P$  poprowadzono styczną do okręgu w punkcie  $A$  i sieczną, przecinającą ten okrąg kolejno w punktach  $B$  i  $C$ . Wiedząc, że  $|PA| = 8$  cm oraz  $|PB| = 4$  cm, oblicz długość cięciwy  $BC$ .

**4.100** Przez punkt  $P$  leżący w odległości 33 cm od środka okręgu, poprowadzono sieczną, która przecina ten okrąg kolejno w punktach  $A$  i  $B$ . Wiedząc, że  $|PA| = |AB| = 6$  cm, oblicz promień tego okręgu.

**4.101** W okręgu poprowadzono dwie cięciwy  $AB$  i  $CD$ , które przecięły się w punkcie  $P$ . Wiedząc, że  $|AP| = 10$  cm,  $|BP| = 4$  cm oraz  $|PD| = 2,5$  cm, oblicz  $|CP|$ .

**4.102** Punkt  $P$  przecina cięciwy  $AB$  i  $CD$  okręgu dzieląc cięciwę  $AB$  na odcinki długości 8 cm i 3 cm. Wiedząc, że  $|CP| = |PD| = 3$ , oblicz długość cięciwy  $CD$ .

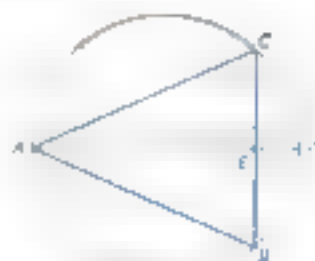
**4.103** Z punktu  $P$  poprowadzono styczną do okręgu w punkcie  $A$  i dwie sieczne: jedna zawiera średnicę okręgu, przecina okrąg kolejno w punktach  $B$  i  $C$ , druga przecina okrąg kolejno w punktach  $D$  i  $E$ . Wiedząc, że  $|AP| = 24$ ,  $|AB| = 18$  oraz  $|PD| = |DE| = 3$ , oblicz:

- promień okręgu,
- długość odcinka  $PE$ .

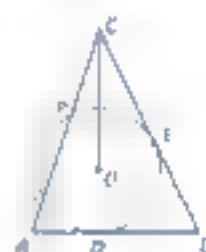
**D 4.104** Punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  należą do okręgu. Styczna do okręgu w punkcie  $A$  przecina półprostą  $CB$  w punkcie  $P$ . Wykaż, że jeśli  $|PB| : |BC| = 1 : 3$  to  $|PA| : |PC| = 1 : 2$ .

**D 4.105** Punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  należą do okręgu. Styczna do okręgu w punkcie  $A$  przecina półprostą  $CB$  w punkcie  $P$ . Wykaż, że jeśli  $|PA| : |PC| = 3 : 5$ , to  $|PB| : |BC| = 9 : 16$ .

4.106. Na rysunku obok punkty  $A, B, C$  należą do okręgu oraz  $|AB| = |AC|$ . Średnica  $AD$  zawiera wysokość  $AE$  trójkąta  $ABC$ . Wiedząc, że  $|AE| = 12$  cm oraz  $|ED| = 3$  cm, oblicz długość boków tego trójkąta.

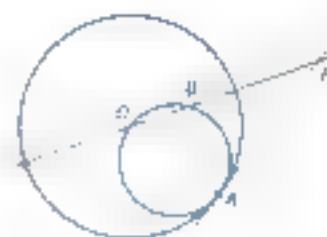


4.107. Na rysunku obok boki  $AB$  i  $BC$  trójkąta  $ABC$  są styczne do okręgu o środku w punkcie  $O$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ . Odległość punktu  $C$  od punktu  $O$  jest równa 5. Okrąg przecina bok  $AC$  kolejno w punktach  $P$  i  $Q$ . Wiedząc, że  $|PQ| = |PC| = 2\sqrt{2}$ , oblicz:



- promień okręgu,
- długości odcinków, na jakie punkt  $E$  dzieli bok  $BC$ .

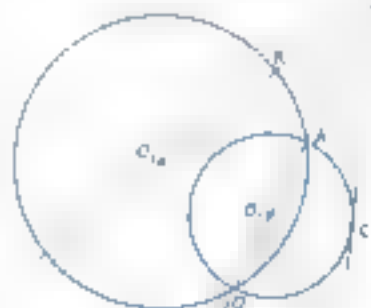
4.108. Środek  $O$  okręgu o promieniu 15 cm jest jednocześnie środkiem odcinka  $AB$  którego długość jest równa 50 cm. Przez punkt  $A$  poprowadzono styczną do okręgu w punkcie  $C$ . Odcinek  $CB$  przecina okrąg w punkcie  $D$ . Oblicz  $|CD|$  i  $|DB|$ .



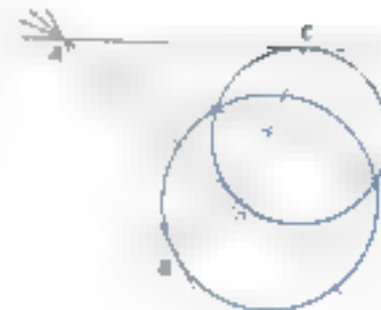
4.109. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w punkcie  $A$ , przy czym mniejszy okrąg przechodzi przez punkt  $O$ , będący środkiem większego okręgu. Przez punkt  $O$  poprowadzono styczną mniejszego okręgu, która przecięła mniejszy okrąg w punkcie  $B$ , a większy w punkcie  $C$ . Styczna do okręgu w punkcie  $A$  przecina się z tą styczną w punkcie  $P$ . Wiedząc, że  $|OB| = \sqrt{5}$  oraz  $|AP| = 10$ , oblicz:

- promień większego okręgu,
- długość ciękwy  $AB$  mniejszego okręgu.

4.110. Na rysunku obok okręgi o środkach  $O_1$  i  $O_2$  przecinają się w punktach  $A$  i  $Q$  oraz punkty  $O_2$  należą do ciękwy  $AQ$ . Z punktu  $P$ , leżącego na prostej  $AQ$ , poprowadzono styczną do okręgu o środku  $O_2$  w punkcie  $C$ . Prosta  $PO_1$  przecina okrąg w punkcie  $B$ . Wiedząc, że  $|PA| = 8$ ,  $|PB| = 6$  oraz  $|PC| = 12$ , oblicz  $|O_1O_2|$ .



4.111. Punkt  $A$  należy do prostej przechodzącej przez punkty przecięcia dwóch okręgów  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Z punktu  $A$  poprowadzono styczną do okręgu  $\sigma_1$  w punkcie  $B$  oraz styczną do okręgu  $\sigma_2$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $C$  – jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli  $\angle DBA = 80^\circ$  oraz  $\angle ACD = 70^\circ$ , to trójkąt  $ABC$  jest równoboczny.



## Symetralne boków trójkąta Okrąg opisany na trójkącie

4.112. W trójkącie  $ABC$  w którym  $\angle C = 90^\circ$  spodek wysokości dzieli bok  $AB$  na odcinki  $AD$  i  $DB$  w taki sposób, że  $AD : DB = 3 : 1$ . Symetralna boku  $AB$  przecina bok  $AC$  w punkcie  $E$  a bok  $BC$  w punkcie  $F$ . Wiedząc, że  $|EF| = 2$  cm, oblicz  $|CD|$ .

4.113. W trójkącie  $ABC$  bok  $AB$  ma długość 16 cm. Punkt  $D$  jest spodem wysokości poprowadzonej z wierzchołka  $C$ . Symetralna boku  $AB$  przecina bok  $CB$  w punkcie  $P$  w taki sposób, że  $|CP| : |PB| = 1 : 2$ . Wiedząc, że odcinek tej symetralnej zawarty w trójkącie ma długość 6 cm, oblicz:

- wysokość  $CD$ ,
- obwód trójkąta  $ABC$ ,
- odległość punktu  $D$  od wierzchołka  $B$ ,
- odległość punktu  $D$  od boku  $AC$ .

4.114. Symetralne boków trójkąta prostokątnego przecinają się w punkcie odległym od wierzchołka kąta prostego o 5 cm. Wiedząc, że długości przyprostokątnych pozostają w stosunku 3 : 4, oblicz obwód tego trójkąta.

4.115. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 2 cm i 6 cm. Oblicz stosunek długości odcinków, na jakie symetralna przeciwprostokątnej dzieli dłuższą przyprostokątną.

4.116. W trójkącie prostokątnym  $ABC$  w którym  $\angle CAB = 90^\circ$  symetralna boku  $AB$  przecina ten bok w punkcie  $D$  zaś bok  $BC$  w punkcie  $E$ . Wiedząc, że  $|AB| = 42$  cm oraz  $|DE| = 28$  cm, oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .



**4.117.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $C$  jest równy  $120^\circ$ . Symetralne boków trójkąta przecinają się w punkcie  $P$ . Wiedząc, że  $|CP| = 4$  cm, oblicz długości boków trójkąta  $ABC$ .

- D 4.118.** Na trójkącie ostrokątnym  $ABC$  opisano okrąg o środku  $S$ . Wykaz, że
- jeśli punkt  $S$  należy do jednej z wysokości trójkąta, to ten trójkąt jest równoramienny,
  - jeśli punkt  $S$  dzieli wysokość trójkąta w stosunku  $2 : 1$  licząc od wierzchołka trójkąta, to ten trójkąt jest równoboczny.

**4.119.** Dane są długości boków  $a$ ,  $b$ ,  $c$  trójkąta. Tak jest położony względem tego trójkąta środek okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli

- $a = 13$ ,  $b = 12$ ,  $c = 5$
- $a = 6$ ,  $b = 24$ ,  $c = 25$
- $a = 5$ ,  $b = 6$ ,  $c = 8$
- $a = 5$ ,  $b = 6$ ,  $c = 7$

**4.120.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym, którego boki mają długość 6 cm.

**4.121.** Wysokość trójkąta równobocznego jest o 3 cm dłuższa od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość boku trójkąta.

**4.122.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długość

- 2 cm i 2 cm
- 24 cm i 7 cm
- 60 cm i 11 cm.

**4.123.** Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 6 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

**4.124.** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 65 cm, a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 60 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

**4.125.** W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa 4 cm. Spodek tej wysokości leży w odległości  $\frac{4}{3}$  cm od środka przeciwprostokątnej. Oblicz:

- promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
- długości boków tego trójkąta.

**4.126.** Na trójkącie prostokątnym opisano okrąg o promieniu 10. Wiedząc, że wysokość tego trójkąta poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa 8 cm, oblicz długości boków tego trójkąta.

**4.127.** W pewnym trójkącie kąt przy wierzchołku  $A$  jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku  $B$ . Wyznacz stosunek długości boków tego trójkąta, jeśli środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$

- należy do boku  $AB$
- należy do boku  $BC$

**4.128.** Na trójkącie prostokątnym opisano okrąg o środku w punkcie  $O$ . Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość  $c$ ,  $c > 0$ .

- D a)** Wykaz, że odległość punktu  $O$  od punktu  $S$  będącego środkiem ciężkości tego trójkąta, jest równa  $\frac{c}{6}$ .

- b)** Wyznacz promień tego okręgu, wiedząc, że odcinek  $OS$  jest o 10 cm krótszy od przeciwprostokątnej.

**4.129.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawa  $AB$  ma długość 18 cm, a ramiona  $BC$  i  $AC$  – 15 cm. Sprawdź, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny. Oblicz wysokość  $CD$  tego trójkąta. Następnie wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie na dwa sposoby:

- korzystając tylko z twierdzenia Pitagorasa,
- korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów prostokątnych.

**4.130.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawa  $AB$  ma długość 16 cm, a ramiona  $BC$  i  $AC$  – 10 cm. Sprawdź, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie na dwa sposoby, jak w zadaniu 4.129.

**4.131.** Dane są długości boków trójkąta równoramiennego. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

- 25 cm, 25 cm, 14 cm
- 61 cm, 61 cm, 120 cm

**4.132.** W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  boki  $AC$  i  $BC$  są równe i mają długość  $4\sqrt{5}$ . Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 5, oblicz  $|AB|$ .

**4.133.** Symetralne boków trójkąta równoramiennego przecinają się w odległości 12,5 cm od wierzchołka przy podstawie i w odległości 10 cm od ramion trójkąta. Oblicz długości boków tego trójkąta.

**D 4.134.** Wykaz, że jeśli promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest równy długości ramion tego trójkąta, to stosunek długości ramienia do długości podstawy tego trójkąta wynosi  $1 : \sqrt{3}$ .

**D 4.135.** Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny  $AC = BC$ . Wysokość poprowadzona na podstawę jest równa  $h$ . Na trójkącie  $ABC$  opisano okrąg o promieniu  $R$ . Wykaz, że jeśli odległość środka tego okręgu od ramienia  $BC$  jest równa  $BC$  to  $h : R = 2 : 5$ . Czy trójkąt  $ABC$  jest ostrokątny czy rozwartokątny?

**4.136.** Podstawa trójkąta równoramiennego ostrokątnego ma długość 4. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $3\frac{1}{3}$ . Oblicz wysokość  $h$  tego trójkąta poprowadzoną na podstawę oraz odległość  $d$  środka okręgu od ramion.

**4.137.** Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość  $28\frac{4}{7}$ . Środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży w odległości 8 od ramion. Oblicz:  
a) długość ramion trójkąta,  
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

## Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt

**4.138.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$ ,  $|AC| = |BC|$ , dwusieczna kąta  $BAC$  tworzy z bokiem  $BC$  kąt  $120^\circ$ . Wyznacz kąty trójkąta  $ABC$ . Rozważ dwa przypadki.

**4.139.** W trójkącie  $ABC$  odcinek  $AD$  dwusiecznej kąta  $BAC$  ma długość taką, jak bok  $AB$ . Wiedząc, że  $\angle BAC = 108^\circ$ , oblicz miary pozostałych kątów trójkąta  $ABC$ .

**4.140.** W trójkącie kąty są równe  $20^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $100^\circ$ . Poprowadzono dwusieczne kątów tego trójkąta. Oblicz miary kątów powstałych w ten sposób sześciu trójkątów.

**4.141.** W trójkąt równoramienny  $ABC$  wpisano okrąg o środku  $O$ . Wiedząc, że  $\angle AOB = 130^\circ$ , oblicz miary kątów tego trójkąta.

**4.142.** Kąty trójkąta  $ABC$  są równe  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ . W trójkąt  $ABC$  wpisano okrąg. Punkty styczności wyznaczają wierzchołki trójkąta  $KLM$ . Wyznacz kąty trójkąta  $KLM$ .

**4.143.** Kąty trójkąta  $ABC$  są równe  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ . Na trójkącie  $ABC$  opisano okrąg. Przez punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  poprowadzono styczne do okręgu, które przecięły się kolejno w punktach  $K$ ,  $L$ ,  $M$ . Wyznacz kąty trójkąta  $KLM$ .

**4.144.** W trójkąt  $ABC$  wpisano okrąg. Punkty  $D$ ,  $E$ ,  $F$  są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z bokami  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ . Wiedząc, że  $|AD| = 5$  cm,  $|DB| = 4$  cm oraz  $|FC| = 3$  cm, oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .

**4.145.** W trójkąt równoramienny  $ABC$  wpisano okrąg. Wiedząc, że  $|AC| = |BC| = 16$  cm oraz  $|AB| = 12$  cm, oblicz długości odcinków, na jakie punkty styczności podzielił bok  $AC$ .

**4.146.** Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny, jeśli:

- boki trójkąta mają długość 10 cm,
- wysokość trójkąta przecina się w punkcie, którego odległość od wierzchołków jest równa 5 cm.

**4.147.** Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 4 cm dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz obwód tego trójkąta.

**4.148.** Wyznacz promień  $r$  okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny, jeśli:

- promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 3,
- różnica długości przyprostokątnej i  $r$  jest równa  $1 + \sqrt{2}$ .

**4.149.** W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 cm, 4 cm wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie punkty styczności podzieliły boki tego trójkąta.

**4.150.** Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość:

- |                 |                          |
|-----------------|--------------------------|
| a) 6 cm i 8 cm  | b) 6 cm i 15 cm          |
| c) 12 cm i 5 cm | d) $2\sqrt{5}$ cm i 4 cm |

**4.151.** Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny równoramienny, jeśli:

- przeciwprostokątna tego trójkąta jest równa 4 cm,
- odległość środka okręgu od wierzchołka kąta prostego jest o 1 cm dłuższa od tego promienia.

**4.152.** Wykaz, że suma promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa średniej arytmetycznej długości przyprostokątnych tego trójkąta.

**4.153.** Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wiedząc, że obwód tego trójkąta wynosi 30 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6,5 cm.

**4.154.** Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 56 cm. Na trójkącie opisano okrąg, w trójkąt wpisano okrąg. Oblicz promienie tych okręgów wiedząc, że ich różnica wynosi 9,5 cm.

**4.155.** Dane są długości boków trójkąta równoramiennego. Wyznacz wysokość tego trójkąta poprowadzoną na podstawę. Następnie oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, korzystając z twierdzenia o odcinkach stycznych i twierdzenia Pitagorasa.

- a) 5 cm, 5 cm, 6 cm                      b) 13 cm, 13 cm, 24 cm

**4.156.** Dane są długości boków trójkąta równoramiennego. Wyznacz wysokość tego trójkąta poprowadzoną na podstawę. Następnie oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów.

- a) 5 cm, 5 cm, 8 cm                      b) 25 cm, 25 cm, 14 cm

**4.157.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  w którym  $AC = BC$  wysokość  $CD$  jest równa 18 cm. Wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 8 cm, oblicz długości boków tego trójkąta.

**4.158.** Podstawa  $AB$  trójkąta równoramiennego  $ABC$  ma długość 12 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

**4.159.** Bok trójkąta mają długość 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna największego kąta trójkąta dzieli bok leżący naprzeciw tego kąta.

**4.160.** Różnica długości dwóch boków trójkąta jest równa 6 m. Dwusieczna kąta leżącego między tymi bokami przecina trzeci bok trójkąta w stosunku 3 : 1. Oblicz długości tych dwóch boków.

**4.161.** W trójkącie równoramiennym poprowadzono dwusieczną kąta przy podstawie, która podzieliła ramię na dwa odcinki mające długość 4 cm i 6 cm. Oblicz długość podstawy tego trójkąta. Rozważ dwa przypadki.

**4.162.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$ , w którym  $AC = BC$  poprowadzono dwusieczną kąta  $BAC$ , która przecięła bok  $BC$  w punkcie  $D$  oraz  $|CD| = \frac{4}{7}$ .

$$|BD| = 3\frac{3}{7}$$

- a) Oblicz długość podstawy  $AB$ .  
b) Wiedząc dodatkowo, że odcinek  $DE$  jest wysokością trójkąta  $ABD$ , oblicz  $|AE|$ ,  $|BE|$ .

**4.163.** W trójkącie równoramiennym bok mają długość 12 m, 10 cm, 10 cm. W trójkąt wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków:

- a) na jakie punkty styczności okręgu z ramieniem dzieli to ramię.  
b) na jakie dwusieczna kąta przy podstawie dzieli przeciwiegle temu kątowi ramię.

**4.164.** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 12 cm, 9 cm. W trójkąt wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków:

- a) na jakie dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną,  
b) na jakie punkty styczności okręgu z przeciwprostokątną dzieli tę przeciwprostokątną.

**4.165.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  kąty ostre są równe  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ . Dwusieczna kąta  $ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Wiedząc, że  $|AC| = 3$ , oblicz:

- a) długość odcinka  $CD$ ,  
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie,  
c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**4.166.** Boki trójkąta mają długości 15, 20, 25. Oblicz długość odcinka dwusiecznej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka:

- a) największego kąta                      b) najmniejszego kąta

**4.167.** W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki długości 3 cm i 4 cm. Oblicz:

- a) długości przyprostokątnych tego trójkąta,  
b) długość odcinka tej dwusiecznej, zawartego w trójkącie.

**4.168.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawa  $AB$  ma długość 12. Dwusieczna kąta  $BAC$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $D$ , którego odległość od podstawy  $AB$  jest równa  $4\frac{4}{11}$ . Wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3, oblicz:

- a) długość odcinka  $AD$                       b) wysokość  $CE$ .

4.169. Podstawa  $AB$  trójkąta równoramiennego  $ABC$  ma długość 18 cm, a wysokość  $BD$  jest równa 14,4 cm. Dwusieczna kąta  $BAC$  przecina ramię  $BC$  w punkcie  $P$ . Oblicz:

- długość ramion  $AC$  i  $BC$ ,
- długość odcinków  $BP$  i  $PC$ ,
- długość odcinka  $AP$  dwusiecznej kąta  $BAC$ .

D 4.170. W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy. Wykaż, że dwusieczna kąta przy podstawie przecina ramię w punkcie, którego odległość od podstawy jest równa  $\frac{1}{3}$  wysokości poprowadzonej na tę podstawę.

4.171. Bok  $AC$  trójkąta  $ABC$  ma długość 25 cm, a wysokość  $CD$  jest równa 24 cm. Dwusieczna kąta  $BAC$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $P$ . Wiedząc, że odległość punktu  $P$  od boku  $AB$  jest równa  $10\frac{2}{3}$  cm, oblicz:

- długość boku  $AB$
- długość boku  $BC$

4.172. W trójkąt równoramienny wpisano okrąg o środku  $O$  i promieniu  $r$  oraz na tym trójkącie opisano okrąg o środku  $S$  i promieniu  $R$ .

D a) Wykaż, że jeśli  $p$  oznacza odległość punktu  $O$  od wierzchołka trójkąta między ramionami, a  $d$  — odległość punktu  $S$  od ramienia tego trójkąta, to  $r : R = p : d$ .

b) Wiedząc, że  $p = 5$ ,  $d = 3\frac{3}{4}$  oraz  $R : r = 25 : 12$ , oblicz  $r$  i  $R$  oraz  $|OS|$ .

4.173. W trójkąt rozwartokątny równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ , wpisano okrąg o środku w punkcie  $O$  i promieniu równym 4 cm. Punkt  $P$  jest punktem styczności tego okręgu z ramieniem  $AC$ , symetralna boku  $AC$  przecina ten bok w punkcie  $M$  oraz symetralną boku  $AB$  w punkcie  $S$ . Wiedząc, że  $|PM| = 4,5$  cm oraz  $|SM| = 10$  cm, oblicz:

- promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ ,
- długość boku  $AB$ .

4.174. W trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ , wpisano okrąg o środku w punkcie  $O$ . Punkty  $P$  i  $M$  są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z ramieniem  $BC$  i podstawą  $AB$ . Sieczna tego okręgu poprowadzona z punktu  $C$  przecina okrąg w punktach  $D$  i  $E$ , a podstawę  $AB$  w punkcie  $F$ . Wiedząc, że  $|CD| = 4\sqrt{10} - 4$ ,  $|DE| = 8$  oraz  $|CF| = 13$ , oblicz:

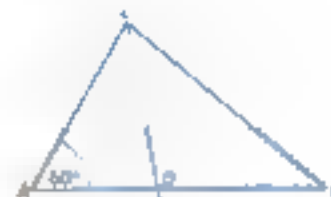


- promień tego okręgu,
- odcinki, na jakie punkt  $P$  dzieli ramię  $BC$ ,
- odległość punktu  $F$  od punktu  $M$ .

## Test sprawdzający do rozdziału 4

1. W trójkącie  $ABC$  na rysunku obok kąt przy wierzchołku  $A$  jest równy  $60^\circ$ . Dwusieczna kąta  $ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Jeżeli  $|CD| = |DB|$ , to kąt  $ACB$  ma miarę:

- $90^\circ$
- $80^\circ$
- $70^\circ$
- $60^\circ$



2. Kąt środkowy ma miarę  $72^\circ$  i jest oparty na łuku okręgu mającym długość  $4\pi$ . Promień tego okręgu jest równy:

- 2
- 4
- 5
- 10

3. Na rysunku obok dany jest okrąg o środku  $O$ , dwa kąty środkowe i kąt wpisany  $\alpha$ . Wówczas:

- $\alpha = 110^\circ$
- $\alpha = 120^\circ$
- $\alpha = 125^\circ$
- $\alpha = 130^\circ$



4. Średnica  $AB$  okręgu ma długość 2. Jeśli długość cięciwy  $BC$  jest równa 1, to:

- $|AC| = 2$
- $|AC| = \sqrt{3}$
- $|AC| = \sqrt{2}$
- $|AC| = 1$

5. Dwa okręgi o promieniach  $R$  i  $r$  są współśrodkowe,  $R > r$ . Cięciwa  $AB$  większego okręgu jest styczna do mniejszego okręgu. Jeśli  $R^2 - r^2 = 9$ , to:

- $|AB| = 6$
- $|AB| = 9$
- $|AB| = 12$
- $|AB| = 18$



6. Odległość między środkami dwóch okręgów jest równa 6. Jeśli promienie tych okręgów są równe  $\pi$  oraz  $2\pi$ , to okręgi te:

- są rozłączne wewnętrznie
- są styczne wewnętrznie
- są rozłączne zewnętrznie
- są przecinające



7. Na rysunku obok dany jest okrąg o środku  $O$  i kącie  $\alpha$  wpisany do okręgu. Z danych na rysunku wynika, że

- A.  $\alpha = 50^\circ$       B.  $\alpha = 55^\circ$   
C.  $\alpha = 60^\circ$       D.  $\alpha = 65^\circ$



8. Bok trójkąta równobocznego ma długość  $a$ , zaś promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $R$ . Wówczas

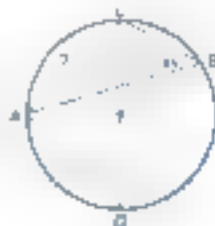
- A.  $a = 2R$       B.  $a = R\sqrt{3}$       C.  $a\sqrt{3} = 4R$       D.  $a\sqrt{3} = 2R$

9. Boki trójkąta mają długość 6 cm, 8 cm, 10 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy,

- A. 2 cm      B. 3 cm      C. 4 cm      D. 5 cm

10. Na rysunku obok trójkąty  $ABC$  i  $ADC$  są wpisane w okrąg o środku w punkcie  $O$ . Odcinek  $CD$  jest średnicą okręgu. Jeśli  $|AC| = 2$  oraz  $|\angle ABC| = 45^\circ$ , to średnica tego okręgu ma długość

- A.  $\sqrt{2}$       B. 2  
C.  $2\sqrt{2}$       D. 4



11. Bok  $AB$  trójkąta  $ABC$  ma długość 24 cm. Punkt przecięcia symetrycznych boków  $BC$ ,  $AC$  leży w odległości 5 cm od boku  $AB$ . Zatem promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  jest równy:

- A. 13 cm      B. 12 cm      C. 11 cm      D. 10 cm

12. W okręgu poprowadzono dwie cięciwy. Punkt przecięcia tych cięciw dzieli jedną z nich na odcinki długości 8 cm, 2 cm, a drugą na odcinki równej długości. Długość drugiej cięciwy jest równa:

- A. 6 cm      B. 8 cm      C. 10 cm      D. 12 cm

13. W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawa  $AB$  ma długość 2 cm. W trójkąt wpisano okrąg. Punkt  $D$  jest punktem styczności tego okręgu z ramieniem  $AC$ . Jeśli  $|AD| : |DC| = 2 : 3$ , to obwód trójkąta  $ABC$  jest równy:

- A. 12 cm      B. 9 cm      C. 8 cm      D. 7 cm

14. W trójkącie  $ABC$  w którym  $AC = BC = 36$  cm, poprowadzono dwusieczną kąta  $CBA$ , która przecięła ramię  $AC$  w punkcie  $D$  jeśli  $CD : AD = 4 : 5$ , to:

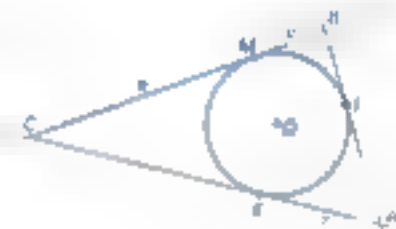
- A.  $AB = 28,8$  cm      B.  $AB = 40$  cm      C.  $AB = 45$  cm      D.  $AB = 54$  cm

15. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest równy 3 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 8,5 cm. Suma długości przyprostokątnych tego trójkąta wynosi:

- A. 17,5 cm      B. 20 cm      C. 23 cm      D. 26 cm

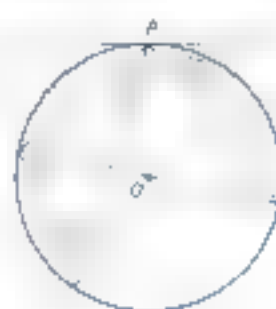
## Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

16. Na rysunku obok proste  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  są st stycznymi do danego okręgu odpowiednio w punktach  $L$ ,  $M$ ,  $N$  przy czym  $|CM| = x$ ,  $|MB| = y$ ,  $|NA| = z$ . Wiadomo, że  $x + y + z = 10$  cm oraz  $3x - 2(y - z)$ . Oblicz długość boku  $AB$ .



17. Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$ . Styczna do tego okręgu w punkcie  $P$ . Korzystając z danych na rysunku, oblicz  $\alpha$ .

a)



b)



18. Punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  należą do okręgu oraz  $\angle CBA = \angle ACB$ . Przez punkty  $B$ ,  $C$  poprowadzono styczne do okręgu, które przecięły się w punkcie  $D$ . Wiedząc, że  $2 \cdot \angle CDB = \angle CBA$ , oblicz miarę kąta między ramionami trójkąta  $ABC$ .

19. Na rysunku obok punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  należą do okręgu o środku w punkcie  $O$  oraz dane są kąty środkowe  $\alpha$  i  $\beta$ .

a) Wykaż, że jeśli  $\alpha = 54^\circ$  i  $\beta = 72^\circ$ , to  $OA \perp BC$ .

b) Oblicz miary kątów trójkąta  $ABC$  w przypadku, gdy  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\beta = 78^\circ$ .





- D 20.** Punkty  $A, B, D$  należą do okręgu o środku w punkcie  $O$ . Ścieżne  $AB$  i  $DO$  przecinają się w punkcie  $C$ , jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli  $|BC| = |BO|$ , to  $|\angle DOA| = 3|\angle CDB|$ .



- 21.** Dwa okręgi  $\odot(O_1, r)$  i  $\odot(O_2, R)$ , gdzie  $r < R$  są styczne wewnętrznie w punkcie  $A$  oraz  $|O_1O_2| = 4$  cm.
- Wyznacz promienie tych okręgów wiedząc, że ich suma jest równa 10 cm.
- D b)** Przez punkt  $A$  poprowadzono prostą, która przecięła mniejszy okrąg w punkcie  $B$  a większy w punkcie  $C$ . Wykaż, że  $O_1, B, O_2$  leżą na jednej prostej. Wiedząc dodatkowo, że  $|BC| = 6$  cm, oblicz  $|AB|$ .
- 22.** Promienie dwóch okręgów są równe  $r_1 = 2$  m i  $r_2 = 3$  m. Odległość między środkami tych okręgów jest równa 14.
- Wyznacz liczbę  $m$  dla której te okręgi mają jeden punkt wspólny. Dla wyznaczonej liczby  $m$  podaj promienie tych okręgów.
  - Dla jakich wartości  $m$  okręgi te mają dwa punkty wspólne?

- 23.** Z punktu  $P$  którego odległość od środka  $O$  okręgu jest równa 15 cm, poprowadzono sieczną, przecinającą okrąg w punktach  $A, B$ . Wiedząc, że promień okręgu jest równy 9 cm oraz  $|PA| \cdot |PB| = 1/3$ , oblicz długość cięciwy  $AB$ .

- D 24.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  na rysunku obok punkt  $D$  jest środkiem dłuższej przyprostokątnej  $AB$ . Półokrąg o średnicy  $AB$  przecina przeciwprostokątną  $BC$  w punkcie  $E$ . Wykaż, że jeśli  $|AD| = |DE|$ , to:
- $|AC| = 2|CE|$
  - $4|CE| \cdot |DB| = 3|AC|^2$



- 25.** W trójkącie  $ABC$  w którym  $AC \perp BC$  wysokość  $CD$  jest równa 4,5 cm. Symetralna boku  $AB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $E$  a bok  $BC$  w punkcie  $F$ . Wiedząc, że  $|EF| = 3$  cm, oblicz  $|AD| \cdot |DB|$ .

- 26.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  przyprostokątne mają długość  $|AB| = 8$  cm,  $|AC| = 6$  cm. Oblicz:

- długość odcinka  $DE$  symetralnej boku  $BC$  zawartego w trójkącie  $ABC$
- długość odcinka  $CF$  dwusiecznej kąta  $ACB$

- 27.** W trójkąt  $ABC$  wpisano okrąg. Wiedząc, że  $|AB| = 20$  cm,  $|AC| = 16$  cm oraz  $|BC| = 12$  cm, oblicz długości odcinków:

- na jakie punkty styczności podzielił bok  $AB$ ,
- na jakie dwusieczna kąta  $ACB$  podzieliła bok  $AB$

- 28.** W trójkącie równoramiennym poprowadzono dwusieczną kąta przy podstawie, która podzieliła przeciwległe ramię na odcinki długości  $7\frac{8}{23}$  oraz  $5\frac{5}{23}$  ko-

lejno od wierzchołka między ramionami trójkąta. Oblicz:

- długość podstawy,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

- 29.** W trójkącie prostokątnym spodek najkrótsze, wysokości dzielą przeciwprostokątną w stosunku 9 : 16. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 25 cm, oblicz:

- długości boków tego trójkąta,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

- 30.** W trójkącie prostokątnym najkrótsza wysokość jest równa 15, a najkrótszy bok ma długość 17. Oblicz:

- długości pozostałych boków trójkąta,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

- 31.** Dane są dwa okręgi  $\odot(O_1, 3)$  i  $\odot(O_2, 2)$  oraz  $|O_1O_2| = 3\frac{1}{5}$ . Wspólna styczna wewnętrzna tych okręgów przecina odcinek  $O_1O_2$  w punkcie  $P$ . Oblicz  $|OP| \cdot |PO_2|$ .

- 32.** Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie - okrąg o środku w punkcie  $O_1$  i promieniu  $r_1 = 3a$  oraz okrąg o środku w punkcie  $O_2$  i promieniu  $r_2 = 4 - a$ , gdzie  $a \in (0, 4)$ . Odcinek  $O_1O_2$  ma długość 8.

- Oblicz  $r_1 \cdot r_2$ .
- Wiedząc dodatkowo, że prosta  $O_1O_2$  przecina styczną zewnętrzną do tych okręgów w punkcie  $A$ , oblicz  $|O_2A|$ .

- 33.** Promienie dwóch okręgów są odpowiednio równe  $r_1 = 5$  m i  $r_2 = 3$  m a odległość między ich środkami wynosi  $m$ . Podaj wszystkie wartości  $m$  spełniające warunki zadania. Ustal w zależności od wartości  $m$  wzajemne położenie tych okręgów.

34. Dany jest odcinek  $AB$  którego długość jest równa 20. Środek  $D$  tego odcinka jest środkiem okręgu o promieniu 6. Z punktu  $A$  poprowadzono styczną do okręgu w punkcie  $C$ . Odcinek  $BC$  przecina okrąg w punkcie  $E$ . Wykaz że  $|CD| = \frac{36}{\sqrt{13}}$ .

35. Dwa okręgi o różnych promieniach przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ . Przez punkt  $B$  poprowadzono secantę prostą do cięciwy  $AB$  która przecina te okręgi odpowiednio w punktach  $C$  i  $D$ . Wykaz, że  $|CD| = 2|O_1O_2|$ .

36. W trójkącie równoramiennym  $ABC$  w którym  $AC = BC$  wysokość  $CD$  jest równa 4,5 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 8 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

37. W trójkącie prostokątnym boki przyległe do kąta prostego mają długości 6 i 12. Na tym trójkącie opisano okrąg. Oblicz:

- promień tego okręgu,
- odległość środka ciężkości trójkąta od środka tego okręgu,
- odległość spodka wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego od środka tego okręgu.

38. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 10 cm. W trójkąt wpisano okrąg. Punkt styczności tego okręgu z przeciwprostokątną znajduje się w odległości 4 cm od środka okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

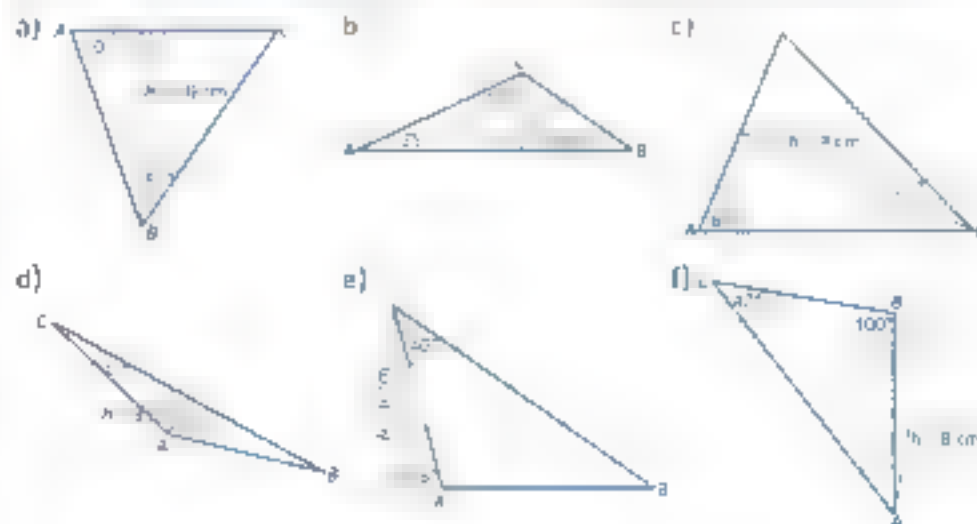
39. W trójkącie  $ABC$  bok  $AC$  ma długość 10 cm. Wysokość  $CD$  dzieli bok  $AB$  na odcinki  $AD = 6$  cm i  $DB = 9$  cm. Oblicz odległość punktu  $P$  od podstawy  $AB$ .

40. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przeciwległy bok w stosunku 2 : 3. Wykaz że stosunek promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

## 5. Trygonometria

### Trygonometria kąta ostrego – powtórzenie wiadomości z klasy 1.

5.1. Oblicz obwód trójkąta  $ABC$  na rysunku poniżej. Dokładność ą do 0,5 cm.



5.2. Średnica  $AB$  okręgu ma długość 10 cm. Cięciwa  $CD$  prostopadła do średnicy  $AB$  jest oddalona od punktu  $A$  o 9 cm. Oblicz:

- tangens kąta  $CBA$
- sinus kąta  $CAB$

5.3. Oblicz:

- $\cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ + (\sin 60^\circ - \cos 45^\circ)$
- $(\tan 30^\circ - \cot 45^\circ)^2 - 8 \sin 30^\circ$
- $(\sqrt{2} \cdot \cot 60^\circ + \sqrt{3} \cos 45^\circ)(\tan 45^\circ - \sqrt{2} \tan 60^\circ)$

5.4. W prostokącie  $ABCD$  przekątne mają długość 4 cm i przecinają się pod kątem

- $60^\circ$
- $45^\circ$
- $30^\circ$

Oblicz odległość punktu  $B$  od przekątnej  $AC$ .

5.5 Wyznacz kąt  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ , wiedząc, że

e)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$       f)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$       g)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$       h)  $\operatorname{ctg} \alpha = 1$

5.6. W trójkącie  $ABC$  kąty przy podstawie  $AB$  są ostre. Poprowadzono wysokość  $CD$ . Wyznacz kąty trójkąta  $ABC$ , jeśli

a)  $|AC| = 10$ ,  $|CD| = 5\sqrt{2}$ ,  $|BC| = 10\sqrt{2}$

b)  $|AD| = 2$ ,  $|DB| = 6$ ,  $|BC| = \sqrt{48}$

5.7. Skonstruuj trójkąt prostokątny, w którym:

a)  $|\angle A| = 90^\circ$ ,  $\sin |\angle B| = \frac{1}{3}$       b)  $|\angle C| = 90^\circ$ ,  $\cos |\angle A| = \frac{3}{4}$

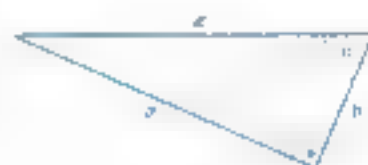
5.8. Dana jest jedna z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ . Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a)  $\sin \alpha = \frac{7}{25}$       b)  $\cos \alpha = \frac{60}{61}$       c)  $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{2}{5}$       d)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$

5.9. Dwa kąty ostre trójkąta mają miary  $\alpha$  i  $\beta$ . Wykaż, że jeśli  $\operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$  oraz  $\cos \beta = \sqrt{3} \cos \alpha$ , to ten trójkąt jest prostokątny, a długości jego boków pozostają w stosunku  $1 : \sqrt{3} : 2$ .

5.10. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość  $a$  i  $b$ , zaś przeciwprostokątna ma długość  $c$ . Wykaż, że jeśli na przeciw boku  $a$  leży kąt  $\alpha$  taki, że  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ , to

$$\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{1}{25}$$



5.11. Wykaż, że jeśli  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$  oraz  $\operatorname{ctg} \alpha = 4$ , to  $\frac{32 \sin \alpha - \sin(90^\circ - \alpha)}{6 \cos 90^\circ - \alpha - 2 \cos \alpha} = 7$

5.12. Wykaż, że:

a)  $\operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 85^\circ = 1$

b)  $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ = 2$

c)  $\sin^4 20^\circ + \sin^4 70^\circ + 2 \cos^2 20^\circ \cos^2 70^\circ = 1$

## Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta płaskiego

5.13. Na końcowym ramieniu kąta  $\alpha$  umieszczonego w układzie współrzędnych w położeniu standardowym, znajduje się punkt  $P$ . Wyznacz odległość tego punktu od punktu  $O(0, 0)$ . Następnie oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , o ile istnieją.

a)  $P(12, 5)$       b)  $P(-2, 2\sqrt{3})$       c)  $P(-\sqrt{3}, -\sqrt{6})$

d)  $P(15, -8)$       e)  $P(0, -3)$       f)  $P(-5, 0)$

5.14. Punkt  $P$  znajduje się na końcowym ramieniu kąta  $\alpha$  w położeniu standardowym. Odległość tego punktu od początku układu współrzędnych jest równa  $r$ . Wyznacz brakującą współrzędną punktu  $P$ , oblicz funkcje trygonometryczne kąta  $\alpha$ , jeśli:

a)  $P(-3, y)$ ,  $r = 5$ ,  $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$

b)  $P(x, 2)$ ,  $r = \sqrt{13}$ ,  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$

c)  $P(x, 4)$ ,  $r = 8,5$ ,  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$

d)  $P(4\sqrt{3}, y)$ ,  $r = 7$ ,  $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$

5.15. Kąt  $\alpha$  znajduje się w położeniu standardowym. Punkt  $P(x, y)$  leży na końcowym ramieniu tego kąta, w odległości  $r$  od punktu  $O(0, 0)$ . Oblicz współrzędne punktu  $P$ , jeśli:

a)  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $r = 6$

b)  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ ,  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ ,  $r = 9$

c)  $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $r = 10$

d)  $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$ ,  $\sin \alpha = -\frac{3}{2}$ ,  $r = 2\sqrt{3}$

5.16. Kąt  $\alpha$  znajduje się w położeniu standardowym. Punkt  $P(x, y)$  wybrano na końcowym ramieniu tego kąta, w odległości  $r$  od punktu  $O(0, 0)$ . Oblicz współrzędne punktu  $P$ , jeśli:

a)  $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ ,  $r = 2\sqrt{5}$

b)  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -3$ ,  $r = \sqrt{10}$

$$c) \alpha \in (270^\circ, 360^\circ), \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}, \quad r = 15$$

$$d) \alpha \in (0^\circ, 90^\circ), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}, \quad r = 5.$$

**5.17.** Jaką miarę ma kąt  $\alpha$ , jeśli  $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$  oraz

$$a) \sin \alpha = 1 \quad b) \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad c) \cos \alpha = 0$$

Dla wyznaczone miary  $\alpha$  oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta, o ile istnieją.

**5.18.** Oblicz, korzystając z definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , jeśli:

$$a) \alpha = 210^\circ \quad b) \alpha = 240^\circ \quad c) \alpha = 135^\circ \quad d) \alpha = 330^\circ$$

**5.19.** W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się końcowe ramię kąta  $\alpha$  w położeniu standardowym, jeżeli:

$$a) \sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0 \quad b) \sin \alpha < 0 \text{ i } \operatorname{tg} \alpha < 0$$

$$c) \operatorname{tg} \alpha > 0, \operatorname{ctg} \alpha > 0 \quad d) \cos \alpha < 0 \text{ i } \operatorname{tg} \alpha < 0$$

$$e) \sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0 \quad f) \cos \alpha > 0, \operatorname{tg} \alpha > 0$$

**5.20.** Kąt  $\alpha$  jest ostry i taką wartość dodatnią czy ujemną, ma poniższe wyrażenie:

$$a) \sin(90^\circ + \alpha) \cdot \cos(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)$$

$$b) \cos(90^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) + \sin(360^\circ - \alpha)$$

$$c) \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) + \sin(180^\circ + \alpha)$$

$$d) \cos[(180^\circ + \alpha) + \sin(270^\circ + \alpha)] \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$$

**5.21.** Kąt  $\alpha$  znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt  $P(x, y)$  wybrano na końcowym ramieniu tego kąta w odległości od punktu  $O(0, 0)$ . Oblicz współrzędne punktu  $P$ , jeśli:

$$a) \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}, \cos \alpha < 0, \quad r = \sqrt{13} \quad b) \operatorname{ctg} \alpha = -3, \sin \alpha > 0, \quad r = 5$$

$$c) \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}, \cos \alpha < 0, \quad r = \frac{\sqrt{29}}{5} \quad d) \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha > 0, \quad r = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

**5.22.** Wykaż, że jeśli  $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$  oraz:

$$a) \sin \alpha = \cos \alpha, \text{ to } \alpha \in \{45^\circ, 225^\circ\} \quad b) \sin \alpha = -\cos \alpha, \text{ to } \alpha \in \{135^\circ, 315^\circ\}$$

**5.23.** Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt o mierze  $\alpha$ , wiedząc, że

$$a) \sin \alpha = \frac{1}{4} \quad b) \cos \alpha = -\frac{2}{5} \quad c) \operatorname{tg} \alpha = 3\frac{1}{2}$$

$$d) \operatorname{ctg} \alpha = -5 \quad e) \sin \alpha = -\frac{3}{4} \quad f) \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Rozważ dwa przypadki:

**5.24.** Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt o takiej mierze  $\alpha$ , że

$$a) \sin \alpha = \frac{5}{6} \text{ i } \operatorname{tg} \alpha < 0 \quad b) \cos \alpha = -\frac{2}{7} \text{ i } \operatorname{ctg} \alpha > 0$$

$$c) \operatorname{tg} \alpha = 2\frac{1}{3} \text{ i } \sin \alpha < 0 \quad d) \operatorname{ctg} \alpha < 2 \text{ i } \cos \alpha > 0$$

## Podstawowe tożsamości trygonometryczne

**5.25.** Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$  jeśli  $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$  oraz:

$$a) \sin \alpha = 0.8 \quad b) \cos \alpha = \frac{1}{4} \quad c) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \quad d) \operatorname{ctg} \alpha = -7$$

**5.26.** Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że  $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$  oraz:

$$a) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \quad b) \cos \alpha = -\frac{24}{25} \quad c) \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad d) \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{11}{60}$$

**5.27.** Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$  jeśli:

$$a) \sin \alpha = -\frac{5}{13}, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ) \quad b) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}, \alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$$

$$c) \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ) \quad d) \cos \alpha = \frac{2}{3}, \alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$$

**5.28.** Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$  jeśli:

$$a) \cos \alpha = \frac{5}{13} \quad b) \sin \alpha = \frac{60}{61} \quad c) \operatorname{ctg} \alpha = 3 \quad d) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{45}{28}$$

5.29. Oblicz wartość wyrażenia:

a)  $\frac{4 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}{\cos \alpha + 3 \sin \alpha}$ , jeśli  $\operatorname{tg} \alpha = 5$

b)  $\frac{3 \cos \alpha - 6 \sin \alpha}{5 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}$ , jeśli  $\operatorname{ctg} \alpha = -2$

5.30. Kąt  $\alpha$  jest rozwarty. Oblicz wartość wyrażenia

a)  $\cos \alpha + \sin^2 \alpha$ , jeśli  $\cos^2 \alpha = 0,81$

b)  $2 \cos \alpha + \sin \alpha$ , jeśli  $\sin^2 \alpha = 0,25$

c)  $\operatorname{tg} \alpha - 6 \operatorname{ctg} \alpha$ , jeśli  $\operatorname{tg} \alpha = 144$

d)  $\frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}$ , jeśli  $\operatorname{ctg} \alpha = 100$

5.31. Oblicz

a)  $\operatorname{tg} \alpha$ , jeśli  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$  oraz  $4 \sin^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha$

b)  $\operatorname{ctg} \alpha$ , jeśli  $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$  oraz  $5 \cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$

c)  $\operatorname{tg} \alpha$ , jeśli  $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$  oraz  $9 \sin^2 \alpha - 5 \cos^2 \alpha = 2$

d)  $\operatorname{ctg} \alpha$ , jeśli  $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$  oraz  $4 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 3$

5.32. Sprawdź, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi, jeśli  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ) \cup (90^\circ, 180^\circ)$ .

a)  $1 - 2 \sin \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

b)  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

c)  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} = 1 + \operatorname{tg} \alpha$

d)  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)$

e)  $\frac{\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha}$

f)  $\frac{\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha} = 3 - \frac{1}{\sin \alpha}$

5.33. Sprawdź, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi, jeśli  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ) \cup (90^\circ, 180^\circ)$ .

a)  $\cos \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

b)  $1 - \sin \alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$

c)  $\frac{2}{\sin^2 \alpha} = 1 + 2 \operatorname{ctg} \alpha$

d)  $\frac{1}{1 - \cos \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$

e)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1 + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

f)  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

5.34. Wiedząc, że  $\alpha$  jest kątem rozwartym oraz  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{7}{13}$ , oblicz

a)  $\sin \alpha - \cos \alpha$

b)  $\sin \alpha + \cos \alpha$

c)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

5.35. Wiedząc, że  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , oblicz

a)  $\sin \alpha - \cos \alpha$

b)  $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2$

c)  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

5.36. Wiedząc, że  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 4$ , oblicz

a)  $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$

b)  $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$

c)  $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2$

5.37. Wykaż, że jeśli  $\alpha \in (0, 90^\circ)$  oraz  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{7}{18}$ , to  $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}$

5.38. Wykaż, że jeśli  $\alpha \in (0, 90^\circ) \cup (180^\circ, 270^\circ)$  oraz  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 2\frac{1}{6}$ , to

$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 2\frac{25}{36}$

5.39. Zbadaj, czy istnieje kąt  $\alpha$  ( $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$ ), który spełnia następujące warunki

a)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$  i  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

b)  $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$  i  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c)  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  i  $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$

d)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$  i  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$

Jeśli tak, to do którego ćwiartki układu współrzędnych należy końcowe ramię kąta  $\alpha$  w położeniu standardowym?

5.40. Czy  $\sin \alpha$  może się równać

a)  $\frac{\sqrt{5}}{4}$

b)  $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

c)  $\frac{1}{\sin \beta}$  dla pewnego kąta  $\beta$

d)  $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta$  dla pewnego kąta  $\beta$

5.41. Czy  $\cos \alpha$  może się równać

a)  $-\frac{\sqrt{7}}{2}$

b)  $\frac{3}{\sqrt{10}}$

c)  $\frac{1}{\sin \beta}$  dla pewnego kąta  $\beta$

d)  $\operatorname{tg} \beta$  dla pewnego kąta  $\beta$



5.42. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , jeśli

a)  $\sin \alpha = b$ , gdzie  $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$  i  $b \in (-1, 0)$

b)  $\cos \alpha = a$ , gdzie  $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$  i  $a \in (0, 1)$ .

5.43. Wykaż, że równość  $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{\cos x} = 2$  nie jest tożsamością trygonometryczną.

5.44. Wykaż, że dana równość nie jest tożsamością trygonometryczną.

a)  $\frac{1}{\cos x} \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$  b)  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \operatorname{tg} x$

5.45. Wykaż, że dana równość nie jest tożsamością trygonometryczną

a)  $\frac{\sin x \operatorname{tg} x}{1 - \cos x} = \frac{1}{\sin x}$  b)  $\frac{1 - \cos x}{\cos x} = \operatorname{ctg} x \cdot \sin x$

5.46. Wykaż, że jeśli  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  to

a)  $|\sin x - \cos x| = \frac{\sqrt{17}}{3}$  b)  $|\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x| = 2\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4}$

5.47. Wykaż, że jeśli  $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$ , to:

a)  $\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$  b)  $\frac{3}{4} \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \leq 1$

5.48. Wykaż, że miejsca zerowe funkcji kwadratowej  $y = 18x^2 - 24x + 7 = 0$  są sinusem i cosinusem pewnego kąta ostrego.

5.49. Wykaż, że miejsca zerowe funkcji kwadratowej  $y = 8x^2 - 4x - 3$  są sinusem i cosinusem pewnego kąta.

5.50. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  dla których równanie  $4x^2 - 4ax + a = 0$  ma jedno rozwiązanie będące jednocześnie sinusem i cosinusem tego samego kąta. Jaką miarę ma ten kąt?

5.51. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  dla którego rozwiązanie równania  $3ax^2 - 4ax + 7 = 0$  są sinusem i cosinusem pewnego kąta. Dla wyznaczonej wartości  $a$  podaj te rozwiązania. W której ćwiartce znajduje się ramię tego kąta w położeniu standardowym?

## Wybrane wzory redukcyjne

5.52. Oblicz, stosując wzory redukcyjne

a)  $\sin 120^\circ \cos 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$

b)  $\operatorname{tg} 120^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ + \cos^2 135^\circ$

c)  $(\cos 120^\circ - \operatorname{tg} 150^\circ)^2$

d)  $(\sin 135^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ) \cdot (\cos 135^\circ - \operatorname{ctg} 150^\circ)$ .

5.53. Dane są liczby:

$a = \sin 120^\circ + \cos 150^\circ = 2 \operatorname{tg} 45^\circ$   $b = \frac{\sin 60^\circ - 2 \cos 135^\circ}{\operatorname{tg} 120^\circ}$

$c = (\cos 150^\circ + \sin 135^\circ)(\cos 30^\circ + \sin 45^\circ)$   $d = \operatorname{tg} 150^\circ \cos 30^\circ + \sin 90^\circ$

Która z tych liczb jest liczbą wymierną?

5.54. Porównaj liczby  $x$  i  $y$ .

a)  $x = \sin 135^\circ$ ,  $y = \operatorname{tg} 150^\circ$  b)  $x = \sqrt{3} \cos 120^\circ$ ,  $y = \sin 120^\circ$

c)  $x = \frac{1}{\operatorname{ctg} 120^\circ}$ ,  $y = \frac{1}{\cos 135^\circ}$  d)  $x = 4^{\sin 150^\circ}$ ,  $y = \frac{1}{2}^{\cos 120^\circ}$

5.55. Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora

a)  $4 \sin 300^\circ \cos 330^\circ \operatorname{ctg} 315^\circ$

b)  $\cos 240^\circ \sin 180^\circ + \cos 0^\circ$

c)  $\sin^2 217^\circ + \cos^2 127^\circ + 2 \sin 37^\circ \cos 127^\circ$

d)  $\operatorname{tg} 225^\circ - \operatorname{ctg} 135^\circ - \sin 0^\circ$

e)  $\cos 0^\circ + \sin 90^\circ - \sin 270^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ$

5.56. Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora

a)  $2 \cos 120^\circ + 4 \operatorname{tg} 210^\circ \sin 120^\circ$  b)  $3 \operatorname{tg} 225^\circ \cos 300^\circ + \sin 150^\circ$

c)  $\cos 210^\circ \operatorname{ctg} 210^\circ + \sin 315^\circ \cos 315^\circ$  d)  $\sin 150^\circ \operatorname{tg} 225^\circ + \sin 300^\circ$

e)  $\sin 180^\circ + \cos 90^\circ + \cos 180^\circ - \sin 270^\circ$

**5.57** Wiedząc, że  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ)$  doprowadź poniższe wyrażenia do najprostszej postaci.

- a)  $\sin(180^\circ - \alpha) \cos(90^\circ + \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha)$   
 b)  $\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)$   
 c)  $\cos(90^\circ - \alpha) \sin(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ + \alpha) \cos(180^\circ - \alpha)$   
 d)  $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$

**5.58** Kąt trójkąta ma miary  $\alpha$  i  $\beta$ . Oblicz funkcje trygonometryczne kąta  $\alpha + \beta$ , jeśli

- a)  $\alpha = 60^\circ$  b)  $\beta = 30^\circ$   
 c)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  d)  $\operatorname{tg} \beta = 1$

**5.59** Wyznacz  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$ , wiedząc, że:

- a)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $\sin \alpha < 0$  b)  $\sin \alpha = 0$  i  $\cos \alpha = 1$   
 c)  $\operatorname{ctg} \alpha = 1$  i  $\sin \alpha > 0$  d)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  i  $\cos \alpha > 0$   
 e)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$  i  $\sin \alpha < 0$  f)  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$  i  $\sin \alpha > 0$

**5.60** Wiadomo, że kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin 90^\circ - \alpha} + \frac{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg} 90^\circ - \alpha} = 3$ . Wykazać,

$$\text{że } \cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

**5.61** Wykaż, że jeśli  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  są kątami trójkąta, to

- a)  $\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$  b)  $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta + \gamma}{2}$

**5.62** Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego  $\alpha$  równość

$$\frac{\sin(200^\circ + \alpha) - 3\cos(250^\circ - \alpha)}{\cos 90^\circ - (20^\circ - \alpha)} = 2 \text{ jest tożsamością.}$$

**5.63** Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego  $\alpha$ , równość

$$\frac{\cos(270^\circ - \alpha) - \sin(\alpha - 270^\circ)}{\sin(\alpha + 90^\circ) + \cos(90^\circ - \alpha)} = 1 \text{ jest tożsamością.}$$

## Kąt skierowany. Miara łukowa kąta

**5.64** Skonstruuj w układzie współrzędnych kąty skierowane  $\alpha$  i  $\beta$ , jeśli

- a)  $\alpha = 30^\circ$   $\beta = -30^\circ$  b)  $\alpha = 135^\circ$   $\beta = -135^\circ$   
 c)  $\alpha = 240^\circ$   $\beta = -240^\circ$  d)  $\alpha = 435^\circ$   $\beta = -435^\circ$

**5.65** Oblicz miarę główną kąta skierowanego  $\beta$ , jeśli:

- a)  $\beta = 457^\circ$  b)  $\beta = -130^\circ$   
 c)  $\beta = 850^\circ$  d)  $\beta = -520^\circ$   
 e)  $\beta = 1710^\circ$  f)  $\beta = -2010^\circ$

**5.66** Oblicz miarę łukową kąta skierowanego  $\widehat{BOA}$ , zobacz rysunek obok, jeśli:

- a)  $r = \frac{1}{2}$   $l = 3$  b)  $r = \frac{1}{4}$   $l = \frac{1}{2}$   
 c)  $r = 2\frac{1}{2}$   $l = \frac{\pi}{3}$  d)  $r = 3$   $l = 4\pi$   
 e)  $r = \pi$   $l = 2\pi$  f)  $r = \frac{1}{2}$   $l = \frac{3\pi}{4}$



**5.67** Zamień na radiany:

- a) 18 b) 20 c) 2 d) 108  
 e) 252 f) 300 g) 35 h) 270

**5.68** Zamień na stopnie:

- a)  $\frac{7}{10}\pi$  b)  $\frac{5}{2}\pi$  c)  $-\frac{2}{9}\pi$  d)  $-\frac{\pi}{6}$   
 e)  $\frac{2}{3}\pi$  f)  $-\frac{41}{6}\pi$  g)  $\frac{11}{4}\pi$  h)  $\frac{13}{3}\pi$

**5.69.** Wyznacz w radianach miarę kąta ostrego  $\alpha$ , który tworzą wskazówki zegara o godzinie.

- a)  $15^{\circ}$                       b)  $17^{\circ}$                       c)  $22^{\circ}$   
d)  $12^{\circ}$                       e)  $2^{\circ}$                       f)  $23^{\circ}$

**5.70.** Od północy wskazówka minutowa obróciła się o kąt

- a)  $\frac{4}{3}\pi$                       b)  $\frac{19}{3}\pi$                       c)  $\frac{61}{6}\pi$   
d)  $\frac{15}{2}\pi$                       e)  $\frac{101}{5}\pi$                       f)  $\frac{64}{30}\pi$

Którą godzinę wskazuje zegar?

**5.71.** Oblicz wartość wyrażenia

- a)  $\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{2}$                       b)  $\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{2}$   
c)  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$                       d)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

**5.72.** Oblicz korzystając ze wzorów redukcyjnych

- a)  $\sin \pi + \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} 2\pi - \frac{\pi}{4}$                       b)  $\cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$   
c)  $\sin 2\pi + \frac{\pi}{3} - \cos 2\pi - \frac{\pi}{6}$                       d)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg} 2\pi + \frac{\pi}{3}$

**5.73.** Oblicz korzystając ze wzorów redukcyjnych

- a)  $\sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$                       b)  $\cos \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$   
c)  $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \pi - \frac{\pi}{3}$                       d)  $\sin \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \sin 2\pi - \frac{\pi}{3}$

**5.74.** Oblicz wartość wyrażenia

- a)  $\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \pi + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{6} - \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$                       b)  $\sin \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{6}$   
c)  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{7\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{4\pi}{3}$                       d)  $\sin \frac{11\pi}{6} - \cos \frac{2\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$

**5.75.** Dana jest jedna z funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , gdzie  $\alpha \in (0, 2\pi)$ . Podaj miarę kąta  $\alpha$  w radianach. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta, o ile istnieją.

- a)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$                       b)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$                       c)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$   
d)  $\operatorname{tg} \alpha = -1$                       e)  $\sin \alpha = 0$                       f)  $\cos \alpha = \frac{3}{2}$

**5.76.** Wyznacz  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , jeśli:

- a)  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  i  $\sin \alpha < 0$                       b)  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$  i  $\operatorname{tg} \alpha < 0$   
c)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  i  $\cos \alpha < 0$                       d)  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  i  $\sin \alpha < 0$

**5.77.** Wyznacz  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , jeśli:

- a)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $\sin \alpha < 0$                       b)  $\sin \alpha = -1$   
c)  $\operatorname{ctg} \alpha = -1$  i  $\sin \alpha > 0$                       d)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  i  $\cos \alpha > 0$

**5.78.** Oblicz wartość wyrażenia  $\cos \alpha + \cos \beta$ , jeśli  $\alpha, \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  oraz

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}, \sin \beta = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

**5.79.** Oblicz wartość wyrażenia  $\cos \alpha + \cos \beta = \sin \alpha + \sin \beta$  jeśli  $\alpha, \beta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

$$\text{oraz } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{12}, \operatorname{ctg} \beta = -\frac{3}{4}.$$

**5.80.** Oblicz wartość wyrażenia  $\operatorname{ctg} \alpha + \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \cos \beta$  jeśli  $\alpha, \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$  oraz

$$\cos \alpha = -\frac{11}{61}, \operatorname{ctg} \beta = 3\frac{3}{7}$$



5.88. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a)  $y = \sin 4x$       b)  $y = \cos \frac{\pi}{3}$       c)  $y = \operatorname{tg} x$   
 d)  $y = \operatorname{ctg} 2x$       e)  $y = \sin \frac{2x}{3}$       f)  $y = \cos \frac{\pi}{2}$

5.89. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a)  $y = \frac{1}{2} \sin(\pi x)$       b)  $y = \operatorname{tg}(\sqrt{3}x) - 4$       c)  $y = -\operatorname{ctg}(x+1)$   
 d)  $y = \cos 2x - \frac{\pi}{1}$       e)  $y = 1 - \operatorname{ctg}(4x - 2)$       f)  $y = 2 \sin \frac{\pi x}{2}$

5.90. Zbadaj parzystość funkcji

a)  $f(x) = x \sin x$       b)  $f(x) = x \operatorname{tg} x$       c)  $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$   
 d)  $f(x) = 3 \sin x - \operatorname{tg} x$       e)  $f(x) = 2 \sin x - x$       f)  $f(x) = 4x + \cos x$

5.91. Wykaż, że funkcja

a)  $f(x) = (\sin x - \cos x)^2 - 1$  jest nieparzysta,  
 b)  $f(x) = \pi (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$  jest parzysta.

5.92. Wyznacz zbiór wartości funkcji

a)  $f(x) = \sin x - 2$       b)  $f(x) = \cos(x - \pi) - 1$   
 c)  $f(x) = \operatorname{tg} x - 3$       d)  $f(x) = 2 - \operatorname{ctg} x$   
 e)  $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x$       f)  $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x - \sin^2 x$

5.93. Wyznacz zbiór wartości funkcji

a)  $f(x) = \frac{3}{2} \cos x$       b)  $f(x) = -5 \sin x + 2$   
 c)  $f(x) = 4 \sin 2x - 1$       d)  $f(x) = 0,5 \cos 3x - 2$

5.94. Wyznacz zbiór wartości funkcji

a)  $f(x) = |3 \sin x| - 1$       b)  $f(x) = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right|$   
 c)  $f(x) = |\operatorname{tg}^2 x - 1|$       d)  $f(x) = 2|\cos x| - 3$

5.95. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a)  $f(x) = -\sin^2 x + 4 \sin x + 12$       b)  $f(x) = \cos x - \cos x - 2$   
 c)  $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x - 2 \operatorname{ctg} x - 3$       d)  $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x$

## Wykresy funkcji trygonometrycznych

5.96. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \sin x$  gdzie  $x \in [-\pi, 2\pi]$ . Napisz równanie osi symetrii wykresu. Następnie odczytaj argumenty, dla których

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$       b)  $f(x) = -1$       c)  $f(x) = -\frac{1}{2}$

5.97. Narysuj wykres funkcji  $y = \sin x$  gdzie  $x \in [-\pi, \pi]$ . Na podstawie wykresu tej funkcji:

- a) podaj zbiór argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne.  
 b) zapisz przedziały monotoniczności tej funkcji.

c) ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby  $\sin \frac{\pi}{5}$ ,  $\sin \frac{\pi}{7}$ ,  $\sin \frac{5\pi}{6}$

$\sin \frac{3\pi}{5}$ ,  $\sin \frac{4\pi}{5}$ ,  $\sin \pi$

5.98. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \sin x$  gdzie  $x \in [0, 2\pi]$ . Na podstawie wykresu tej funkcji podaj znak wyrażenia:

a)  $\sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3}$       b)  $\sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{6}$   
 c)  $\sin \frac{5\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{5}$       d)  $\sin \left( \frac{\pi}{10} \right) - \sin \frac{8\pi}{9}$   
 e)  $\sin 1 - \sin 3$       f)  $\sin 3 + \sin 5$

5.99. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \cos x$  gdzie  $x \in [-2\pi, 2\pi]$ . Napisz równanie osi symetrii wykresu funkcji  $f$ . Następnie odczytaj z wykresu argumenty, dla których

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$       b)  $f(x) = 1$       c)  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5.100. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \cos x$ , gdzie  $x \in (-\pi, \pi)$ .

- a) Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość dodatnią.  
 b) Zapisz przedziały monotoniczności funkcji  $f$ .

c) Ustaw w kolejności od najmniejszej do największej liczby  $\cos \frac{\pi}{5}$ ,  $\cos \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \frac{6\pi}{7}$

$\cos \left( -\frac{3\pi}{5} \right)$ ,  $\cos \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos(-\pi)$



**5.101.** Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \cos x$  gdzie  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Na podstawie wykresu tej funkcji podaj znak wyrażenia:

- a)  $\cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right)$       b)  $\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{4}$   
 c)  $\cos \left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos \left(\frac{2\pi}{7}\right)$       d)  $\cos \frac{5\pi}{8} \cdot \cos \frac{4\pi}{9}$   
 e)  $\cos 1 + \cos 3$       f)  $\cos 2 < \cos 3$

**5.102.** We wspólnym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji  $f(x) = \sin x$  oraz  $g(x) = \cos x$  gdzie  $x \in [2\pi, 3\pi]$ . Na podstawie tych wykresów

- a) wyznacz argumenty, dla których obie funkcje przyjmują tę samą wartość  
 b) porównaj liczby  $\{\sin 109^\circ, \cos 109^\circ\}$  oraz  $\{\sin 271^\circ, \cos 271^\circ\}$ .  
 c) wyznaczyć wartość funkcji  $f(x) = \sin x$  dla tych argumentów, dla których funkcja  $g(x) = \cos x$  przyjmuje wartość  $\frac{1}{2}$

**5.103.** W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj wykres funkcji  $f(x) = \tan x$  gdzie  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ . Na podstawie wykresu

- a) określ znak iloczynu  $\tan(-113^\circ) \cdot \tan 65^\circ \cdot \tan 124^\circ$ .  
 b) wyznacz argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość 1.  
 c) podaj zbiór argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości mniejsze od 1.

**5.104.** Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \tan x$  gdzie  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ .

Na podstawie tego wykresu:

- a) uporządkuj malejąco liczby  $\tan 61^\circ, \tan 265^\circ, \tan 3^\circ, \tan 178^\circ$ .  
 b) podaj argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość  $\sqrt{3}$ .  
 c) wyznaczyć zbiór argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości większe od 1.

**5.105.** We wspólnym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji  $f(x) = \tan x$  oraz  $g(x) = \cot x$  gdzie  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Następnie:

- a) wypisz argumenty, dla których obie funkcje przyjmują tę samą wartość.  
 b) podaj zbiór argumentów, dla których wartości funkcji  $g$  są większe od wartości funkcji  $f$ .

**5.106.** Narysuj wykres funkcji  $y = \tan x$  w przedziale  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ . Następnie skorzystaj z okresowości funkcji  $f(x) = \tan x$  wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste  $x$  dla których:

- a) funkcja  $f$  przyjmuje wartość  $\sqrt{3}$ .  
 b) funkcja  $f$  przyjmuje wartość  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .  
 c) funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne.

**5.107.** Narysuj wykres funkcji  $y = \cot x$  w przedziale  $(0, \pi)$ . Następnie skorzystaj z okresowości funkcji  $f(x) = \cot x$  gdzie  $x \in k\pi, k \in \mathbb{Z}$  wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste  $x$ , dla których

- a) funkcja  $f(x) = \cot x$  przyjmuje wartość  $-\sqrt{3}$ .  
 b) funkcja  $f$  przyjmuje wartości dodatnie.  
 c) funkcja  $f(x) = \cot x$  przyjmuje wartości mniejsze od  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**5.108.** Narysuj wykres funkcji  $y = \sin x$  w przedziale  $[-\pi, \pi]$ . Następnie skorzystaj z okresowości funkcji  $f(x) = \sin x$  wyznacz w zbiorze liczb rzeczywistych:

- a) argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość 1.  
 b) argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .  
 c) miejsca zerowe funkcji  $f$ .  
 d) przedziały, w których funkcja  $f$  przyjmuje wartości dodatnie.

**5.109.** Narysuj wykres funkcji  $y = \cos x$  w przedziale  $[0, 2\pi]$ . Następnie skorzystaj z okresowości funkcji  $f(x) = \cos x$  wyznacz w zbiorze liczb rzeczywistych:

- a) argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość  $-1$ .  
 b) argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość  $\frac{1}{2}$ .  
 c) miejsca zerowe funkcji  $f$ .  
 d) przedziały, w których funkcja  $f$  przyjmuje wartości niedodatnie.

**5.110.** Narysuj wykres funkcji:

- a)  $y = \sin x + 2$       b)  $y = \tan x - 3$   
 c)  $y = 2 - \sin x$       d)  $y = \frac{1}{2} \cos x$   
 e)  $y = \tan \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$       f)  $y = -\cot \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

5.111. Narysuj wykres funkcji:

a)  $y = \sin|x|$

b)  $y = \{\cos x\}$

c)  $y = \left\{ \begin{array}{l} \cos x \\ 2 \end{array} \right\}$

d)  $y = \operatorname{ctg} x + 1$

e)  $y = \operatorname{tg}\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$

f)  $y = -|\sin x| - 2$

5.112. Narysuj wykres funkcji:

a)  $y = -\cos \frac{1}{2}x$ , gdzie  $x \in (-2\pi, 2\pi)$

b)  $y = \sin(-2x)$ , gdzie  $x \in (0, 2\pi)$

c)  $y = \operatorname{ctg} 2x$ , gdzie  $x \in (-\pi, \pi) - \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$

d)  $y = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ , gdzie  $x \in (-\pi, \pi)$

5.113. Podaj wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymasz przesuwając równolegle wykres funkcji:

a)  $f(x) = \sin 2x$  o wektor  $\vec{u} = \left[\frac{\pi}{6}, 0\right]$

b)  $f(x) = \cos 3x$  o wektor  $\vec{u} = \left[\frac{\pi}{4}, 0\right]$

c)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$  o wektor  $\vec{u} = \left[\frac{2\pi}{3}, 0\right]$

5.114. Dane są funkcje  $f, g$ . Podaj, o jaki wektor wzdłuż osi  $OX$  należy przesunąć wykres funkcji  $f$ , aby otrzymać wykres funkcji  $g$ .

a)  $f(x) = \sin 3x$ ,  $g(x) = \sin\left(3x + \frac{3}{4}\right)$

b)  $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}$ ,  $g(x) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

c)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{3x}{2}$ ,  $g(x) = \operatorname{tg} \frac{3x}{2} - \frac{2\pi}{3}$

## Test sprawdzający do rozdziału 5.

1. Kąt  $\alpha$  znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt  $P(-5, 12)$  należy do drugiego ramienia tego kąta. Zatem:

A.  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$     B.  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$     C.  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$     D.  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{5}$

2. Punkt  $P$  należy do drugiego ramienia kąta  $\alpha$  w położeniu standardowym i jest punktem przecięcia się prostej  $k: x = -3$  z prostą  $l: y = -4x$ . Zatem:

A.  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$     B.  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$     C.  $\operatorname{tg} \alpha = -4$     D.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$

3. O kącie płaskim  $\alpha$  wiadomo, że  $\operatorname{tg} \alpha < 0$  i  $\sin \alpha < 0$ . Zatem:

A.  $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$     B.  $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$     C.  $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$     D.  $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$

4. Jeśli  $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$  i  $\cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$ , to:

A.  $\operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = \frac{5}{6}$     B.  $\operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = \frac{6}{5}$     C.  $\operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = -\frac{6}{5}$     D.  $\operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = -\frac{5}{6}$

5. Wartość wyrażenia  $\sin^2(90^\circ + 44^\circ) - \cos^2 44^\circ$  jest równa:

A. 0    B.  $2\cos^2 44^\circ$     C. -1    D.  $-\frac{1}{2}$

6. Wyrażenie  $\cos(180^\circ - \alpha) \sin(90^\circ - \alpha) + 1$  jest równe:

A.  $\sin \alpha \cos \alpha + 1$     B. 2    C.  $\cos^2 \alpha + 1$     D.  $\sin^2 \alpha$

7. Wyrażenie  $\operatorname{tg} 135^\circ \cos 120^\circ$  jest równe:

A. 1    B.  $\frac{1}{2}$     C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     D.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

8. Jeśli  $\alpha = 150^\circ$ , to:

A.  $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha = 0$     B.  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

C.  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$     D.  $\frac{2 \sin \alpha + 1}{2 \cos \alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. Jeśli  $\alpha, \beta, \gamma$  są kątami trójkąta oraz  $\alpha = 15^\circ, \beta = 30^\circ$ , to

A.  $\cos \gamma = \sqrt{2} \sin \beta$

B.  $\cos \gamma = \sin(\alpha + \beta)$

C.  $\cos \gamma = 0,5 \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$

D.  $\sqrt{3} \cos \gamma = \operatorname{tg} 2\beta$

10. Jeśli  $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$  i  $\operatorname{tg} \alpha = 5$ , to

A.  $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$

B.  $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$

C.  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

D.  $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$

## Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. Na drugim ramieniu kąta  $\alpha$  znajdującego się w położeniu standardowym leży

punkt  $P(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ .

12. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta znajdującego się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym, wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta równego  $300^\circ$ .

13. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$ , wiedząc, że:

a)  $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$  i  $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$

b)  $\sin \alpha = \frac{3}{7}$

14. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt  $\alpha$ , wiedząc, że:

a)  $\operatorname{tg} \alpha = 2,5$  i  $\cos \alpha < 0$

b)  $\operatorname{ctg} \alpha = -3$

15. Porównaj liczby:  $a = \sin 135^\circ$  oraz  $b = \sin^2 150^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos^2 120^\circ$

16. Wyznacz miarę kąta  $\alpha, \alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$ , wiedząc, że:

a)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $\operatorname{tg} \alpha < 0$

b)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$  i  $\sin \alpha > 0$

17. Kąt  $\alpha$  jest kątem ostrym oraz  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2,5$ . Oblicz:

a)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$

b)  $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$

18. Kąt  $\alpha$  jest kątem rozwartym oraz  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ . Oblicz

a)  $\sin \alpha - \cos \alpha$

b)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$

19. Oblicz wartość wyrażenia:

a)  $\operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 75^\circ \operatorname{tg} 135^\circ$

b)  $\operatorname{tg} 120^\circ \operatorname{tg} 130^\circ \operatorname{tg} 140^\circ$

20. Wykaż, że:

a)  $(\sin 15^\circ + \cos 165^\circ)^2 + 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ = 1$

b)  $(\sin 130^\circ + \cos 50^\circ)^2 - 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ = 1$

21. Wykaż, że jeśli  $\alpha$  jest kątem ostrym i  $\frac{3 \sin \alpha - 8 \cos \alpha}{4 \cos \alpha - 5 \sin \alpha} = 7$  to  $\alpha = 45^\circ$

22. Wykaż, że jeśli suma cosinusów wszystkich kątów trójkąta prostokątnego jest równa  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$  to iloczyn sinusów tych kątów jest równy  $\frac{2}{5}$

23. Wykaż, że jeśli  $a = 3\sqrt{9} \cdot 10^{-\pi}$  i  $b = \sqrt{\operatorname{tg} 210^\circ}$  to  $a \cdot b = 1$

24. Wykaż, że dana równość jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

a)  $(1 + \sin \alpha) \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \cos \alpha$

b)  $1 + \cos \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \sin \alpha$

25. Wykaż, że jeśli  $\alpha$  jest kątem ostrym i  $2 \cos \alpha - 5 \sin \alpha = 4$  to  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 4,5$

26. Wykaż, że jeśli  $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$  to  $2 \cos \alpha - 1)(2 \cos \alpha + 1) = 3 - 4 \sin \alpha$

27. Oblicz wartość wyrażenia:  $\sin(-1320^\circ) \cdot \operatorname{tg} 840^\circ + \cos(-2100^\circ)$ .

28. Zapisz miarę kąta skierowanego  $\alpha$  w radianach, jeśli:

a)  $\alpha = 765^\circ$

b)  $\alpha = -306^\circ$

29. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$  jeśli:

a)  $\cos \alpha = \frac{3}{4}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

b)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{17}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

30. Oblicz  $\cos \frac{4\pi}{3}$ ,  $\sin \frac{7\pi}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{10\pi}{3}$ .

31. Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego  $\alpha$  wartość wyrażenia

$$\frac{\sin 90^\circ}{1 - \sin \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$$

32. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a)  $y = 2 \sin \frac{\pi x}{2}$

b)  $y = \operatorname{tg} \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right)$

33. Zbadaj parzystość funkcji  $f(x) = -\sin |x|$ , gdzie  $x \in (-2\pi, 2\pi)$

a) Narysuj wykres funkcji  $f$

b) Odczytaj z wykresu argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Podaj dziedzinę funkcji  $g(x) = f(2x)$  i narysuj jej wykres.

d) Odczytaj z wykresu funkcji  $g$  argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie

34. Narysuj wykres funkcji  $y = 2 \cos x - \frac{\pi}{3}$  gdzie  $x \in [-\pi, 2\pi]$

a) Odczytaj z wykresu zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości ujemne

b) Zapisz wszystkie argumenty, dla których funkcja  $f(x) = 2 \cos x - \frac{\pi}{3}$  określona w zbiorze  $A$  przyjmuje wartość 1

c) Narysuj wykres funkcji  $g(x) = f(x)$  podając okres podstawowy

35. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ , gdzie  $x \in (-\pi, \pi)$ .

a) Odczytaj z wykresu argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości nie mniejsze niż 1.

b) Wykres funkcji  $f$  przesunąć równolegle o wektor  $\vec{u} = \left[ \frac{\pi}{4}, 0 \right]$ . Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz.

## 6. Geometria analityczna

### Odcinek w układzie współrzędnych

6.1 Oblicz długość odcinka  $AB$ , jeśli:

a)  $A(3, 7)$ ,  $B(-8, 7)$

b)  $A(-5, -2)$ ,  $B(-5, 7)$

c)  $A(1, 9)$ ,  $B(-7, -6)$

d)  $A(10, 6)$ ,  $B(4, 0)$

e)  $A(\sqrt{5}+2, \sqrt{5})$ ,  $B(1, -1)$

f)  $A\left(3\frac{1}{3}, -5\right)$ ,  $B\left(\frac{2}{3}, -3\right)$

6.2. Wyznacz współrzędne środka odcinka  $AB$ , jeśli:

a)  $A(0, 4)$ ,  $B(-2, 0)$

b)  $A(-3, 1)$ ,  $B(3, 5)$

c)  $A(4, -1)$ ,  $B(-10, 9)$

d)  $A(\sqrt{2}, -3)$ ,  $B(\sqrt{2}, 7)$

6.3. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku  $ABCD$  – punkt  $P$  przecięcia się przekątnych. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku, jeśli:

a)  $A(-3, 5)$ ,  $B(-2, -1)$ ,  $P(3, 1)$

b)  $B(4, -2)$ ,  $C(2, 7)$ ,  $P(1, 2)$

Narysuj równoległobok  $ABCD$  w układzie współrzędnych.

6.4. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku  $ABCD$ . Oblicz współrzędne czwartego wierzchołka oraz współrzędne punktu  $P$  przecięcia przekątnych, jeśli:

a)  $A(4, 1)$ ,  $B(2, 6)$ ,  $C(8, 3)$

b)  $A(-5, -2)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $D(-2, 5)$

Narysuj równoległobok  $ABCD$  w układzie współrzędnych.

6.5. Oblicz długości przekątnych równoległoboku  $ABCD$ , jeśli:

a)  $A(5, 1)$ ,  $B(8, -3)$ ,  $C(3, 9)$

b)  $A(-4, 5)$ ,  $B(5, -3)$ ,  $D(-3, 3)$

6.6 Oblicz długość boków równoległoboku  $ABCD$  jeśli dane są dwa jego wierzchołki i punkt  $P$  przecięcia się przekątnych

a)  $A(4, -6)$ ,  $B(9, -6)$ ,  $P(7, 2)$

b)  $A(-3, -5)$ ,  $P(2, 1)$ ,  $D(-1, 3)$

6.7 Dany jest trójkąt  $ABC$  gdzie  $A(4, -1)$ ,  $B(4, 5)$ ,  $C(2, 9)$ . Oblicz długość środkowej:

- a)  $AD$                       b)  $BE$                       c)  $CF$

6.8. Wyznacz współrzędne punktów podziału odcinka  $AB$ .

- a) na cztery odcinki równej długości, jeśli  $A(5, 7)$ ,  $B(3, 5)$ ,  
b) na trzy odcinki równej długości, jeśli  $A(2, -3)$ ,  $B(10, 3)$ ,  
c) na sześć odcinków równej długości, jeśli  $A(-1, 3)$ ,  $B(5, 25)$ .

6.9. Oblicz współrzędne punktu  $S$  przecięcia środkowych w trójkąt o  $ABC$  jeśli:

- a)  $A(0, 0)$ ,  $B(9, 0)$ ,  $C(0, 6)$   
b)  $A(4, 0)$ ,  $B(2, 5)$ ,  $C(0, 2)$   
c)  $A(2, 7)$ ,  $B(-2, 2)$ ,  $C(4, 0)$   
d)  $A(-4, -6)$ ,  $B(2, -11)$ ,  $C(5, 5)$

6.10. W trójkącie  $ABC$  dane są wierzchołki  $A(5, 2)$ ,  $B(7, 4)$ ,  $C(1, 7)$ . Na bokach  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  tego trójkąta zaznaczono odpowiednio punkty  $D$ ,  $E$ ,  $F$  w taki sposób, że  $AD:DB = BE:EC = CF:FA = 1:2$ . Oblicz współrzędne tych punktów.

D 6.11. Wykaz, że trójkąt o wierzchołkach  $A(0, 2)$ ,  $B(6, 2)$ ,  $C(7, 6)$  jest równoramienny.

D 6.12. Wykaz, że trójkąt o wierzchołkach  $A(2, 3)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $C(2, 4)$  jest prostokątny.

D 6.13. Dane są punkty  $A(2, 0)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(4, 6)$ ,  $D(1, 5)$ . Wykaz, że czworokąt  $ABCD$  jest rombem.

D 6.14. Korzystając z własności wektorów wykaż, że jeśli  $A(0, -1)$ ,  $B(6, 1)$ ,  $C(3, 5)$ ,  $D(-3, 3)$ , to czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem.

D 6.15. Korzystając z własności wektorów wykaż, że jeśli  $A(-3, 4)$ ,  $B(6, 1)$ ,  $C(6, 4)$ ,  $D(3, 5)$ , to czworokąt  $ABCD$  jest trapezem.

## Równanie kierunkowe prostej

6.16. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty  $A$  i  $B$ .

- a)  $A(2, -3)$ ,  $B(6, 7)$                       b)  $A(-4, 1)$ ,  $B(2, 7)$   
c)  $A\left(\frac{-3}{4}, -1\right)$ ,  $B\left(\frac{-1}{4}, 8\right)$                       d)  $A\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

6.17. Prosta  $k$  przechodzi przez punkt  $A$ , a jej współczynnik kierunkowy jest równy  $a$ . Wyznacz równanie kierunkowe prostej  $k$ .

- a)  $a = -3$ ,  $A(5, 6)$                       b)  $a = 2$ ,  $A(10, 12)$   
c)  $a = \frac{2}{3}$ ,  $A(-1, -9)$                       d)  $a = \frac{3}{4}$ ,  $A(24, 36)$

6.18. Napisz równanie kierunkowe prostej, przechodzącej przez punkty  $A$  i  $B$ .

- a)  $A(-10, 58)$ ,  $B(2, 22)$                       b)  $A(-8, -95)$ ,  $B(4, 25)$   
c)  $A(-10, 7)$ ,  $B(5, -3)$                       d)  $A(-6, -2)$ ,  $B(24, 4)$

6.19. Dane jest równanie prostej  $k$ . Podaj miarę kąta nachylenia tej prostej do osi  $OX$ .

- a)  $k: y = x - 1$                       b)  $k: y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$                       c)  $k: y = 1 - \sqrt{3}x$   
d)  $k: y = x + 2$                       e)  $k: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{2}$                       f)  $k: y = -\frac{3 - 2\sqrt{3}x}{6}$

6.20. Dane są punkty  $A$  i  $B$ . Podaj, z dokładnością do jednego stopnia, miarę kąta nachylenia prostej  $AB$  do osi  $OX$ .

- a)  $A(-4, 2)$ ,  $B(1, 8)$                       b)  $A(5, 6)$ ,  $B(9, -4)$   
c)  $A(12, 3)$ ,  $B(6, 15)$                       d)  $A(2, 3)$ ,  $B(-1, -19)$

6.21. Wyznacz równanie kierunkowe prostej  $k$  przechodzącej przez punkt  $P$  nachylonej do osi  $OX$  pod kątem  $\alpha$ .

- a)  $P(0, 0)$ ,  $\alpha = 135^\circ$                       b)  $P(0, 6)$ ,  $\alpha = 30^\circ$   
c)  $P(4, 0)$ ,  $\alpha = 120^\circ$                       d)  $P(3, -4)$ ,  $\alpha = 45^\circ$   
e)  $P(-2\sqrt{3}, 5)$ ,  $\alpha = 60^\circ$                       f)  $P(\sqrt{6}, \sqrt{8})$ ,  $\alpha = 150^\circ$

6.22. Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A(4, 3)$ ,  $B(4, 5)$ ,  $C(8, 1)$ . Wyznacz:  
a) równania kierunkowe prostych zawierających środkowe  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$   
b) współrzędne punktu przecięcia tych prostych.

6.23. Wyznacz liczbę  $a$  wiedząc, że prosta  $m$  jest równoległa do prostej  $k$ .

- a)  $k: y = 2a - 3)x + 4$ ,                       $m: y = 4x - 7$   
b)  $k: y = 3x - a$                        $m: y = 4 - (4 - a)x$   
c)  $k: y = (1 - a)x$                        $m: y = (2a - 5)x - 9$   
d)  $k: y = 8$ ,                       $m: y = (a - 10)x - 7$



6.24. Dana jest prosta  $m: y = 2x - 1$ .

- Napisz równanie prostej  $k$  równoległej do prostej  $m$  przechodzącej przez punkt  $(-1, 5)$ .
- Naszkicuj obydwie proste w układzie współrzędnych.
- Sprawdź algebraicznie, że proste  $k$  i  $m$  nie mają punktów wspólnych.

6.25. Napisz równanie kierunkowe prostej  $m$  równoległej do prostej  $k$  przechodzącej przez punkt  $A$ .

- $k: y = 2, A(3, -5)$       b)  $k: y = \frac{3}{4}x, A(-8, 3)$
- $k: y = -2x + 5, A(-0,5, 4)$       d)  $k: y = 0,125x - 1, A(16, 20)$

6.26. Wyznacz  $\alpha$  wiedząc, że prosta  $k$  jest prostopadła do prostej  $m$ .

- $k: y = 3x + 6, m: y = \alpha x - 8$
- $k: y = (-0,25\alpha + 3)x + 2, m: y = 4x - 8$
- $k: y = 5 + (4 - 2\alpha)x, m: y = \frac{2}{3}x + 11$
- $k: y = -x + 3\alpha\sqrt{5}, m: y = (2\alpha - \sqrt{5})x - 19\alpha$

6.27. Dane jest równanie prostej  $m: y = 2x - 2$ .

- Napisz równanie prostej  $k$  która jest prostopadła do prostej  $m$  i przechodzi przez punkt  $(0, 3)$ .
- Oblicz współrzędne punktu wspólnego tych prostych.
- Naszkicuj proste  $k$  i  $m$  w układzie współrzędnych, następnie zaznacz ich wspólny punkt.

6.28. Napisz równanie kierunkowe prostej  $m$  prostopadłej do prostej  $k$  przechodzącej przez punkt  $A$ .

- $k: y = \frac{2}{3}x, A(-4, 1)$
- $k: y = x + 8, A(2\sqrt{3} - \sqrt{3})$
- $k: y = 4x - 1, A(2, 9)$
- $k: y = 0,75x + 3, A(6, -4)$

6.29. Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A(-4, 2), B(4, -1), C(-2, 2)$ .

- Napisz równania kierunkowe prostych  $AB, BC, AC$ .
- Czy trójkąt  $ABC$  jest prostokątny? Odpowiedź uzasadnij.

6.30. Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach  $A, B$ .

- $A(-4, -1), B(4, -3)$       b)  $A(-4, -3), B(2, 3)$
- $A(0, 3), B(4, -5)$       d)  $A(1, -3), B(7, 1)$

D 6.31. Wykaż, że prosta  $k: y = 3x - 5$  jest symetralną odcinka o końcach  $A(-2, 1), B(5, 0)$ .

D 6.32. Dane są punkty  $A(5, -4), B(1, 1), C(3, 2)$ . Wykaż, że wysokość trójkąta  $ABC$ , poprowadzona z wierzchołka  $C$ , zawiera się w prostej  $k: y = -2x + 4$ .

D 6.33. Dane są punkty  $A(1, 2), B(-6, 1), C(5, 1), D(10, 4)$ . Korzystając z własności prostych, opisanych równaniami kierunkowymi, wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem.

D 6.34. Dane są punkty  $A(1, -3), B(5, 0), C(3, 4), D(-3, 1)$ . Korzystając z własności prostych, opisanych równaniami kierunkowymi, wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest prostokątem.

D 6.35. Dane są punkty  $A(4, 1), B(0, 2), C(3, 2), D(1, 5)$ . Korzystając z własności prostych, opisanych równaniami kierunkowymi, wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest kwadratem.

6.36. W trójkącie  $ABC$  dany jest wierzchołek  $A(-6, 2)$ , środek  $E(0, 1)$  boku  $AB$  oraz wektor  $\vec{BC} = (8, 4)$ . Wyznacz równania kierunkowe prostych, w których zawierają się boki trójkąta  $ABC$ .

6.37. W trójkącie  $ABC$  punkt  $K(5, 1)$  jest środkiem boku  $AC$ , zaś punkt  $L$  – środkiem boku  $BC$ . Wiedząc, że  $\vec{AK} = [1, 6]$  oraz  $\vec{KL} = [8, 4]$ , wyznacz równania kierunkowe prostych, w których zawierają się boki trójkąta  $ABC$ .

6.38. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p, p \in \mathbb{R}$  dla których prosta  $k$  jest równoległa do prostej  $m$ .

- $k: y = 14 + p, x = 8, m: y = 3x + 2$
- $k: y = x + 6p, m: y = [p - 5] \cdot x - 3p$
- $k: y = 9 - [2 - p] \cdot x, m: y = 5$

6.39. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$  dla których prosta  $k$  jest prostopadła do prostej  $m$ .

- a)  $k: y = -0,2x - 1$ ,  $m: y = p - 3x + 3$   
 b)  $k: y = x + 6p$ ,  $m: y = 5 - 4p - x$   
 c)  $k: y = 3 + p - 4x$ ,  $m: y = \frac{1}{8}p - 8x - p$

## Równanie ogólne prostej

6.40. Dane jest równanie prostej  $k$ . Przedstaw to równanie w postaci ogólnej.

- a)  $\frac{x}{3} = \frac{12}{3} - \frac{x}{3}$       b)  $y = \frac{x-5}{4}$       c)  $y + \frac{x-1}{2} = \frac{x+2}{3}$

6.41. Punkty  $A$  i  $B$  należą do prostej  $k$ . Wyznacz równanie ogólne prostej  $k$ .

- a)  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 4)$       b)  $A(3, -4)$ ,  $B(11, -4)$   
 c)  $A(-3, 2)$ ,  $B(4, 9)$       d)  $A(-2, 6)$ ,  $B(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

6.42. Do prostej należą punkty  $P$  i  $Q$ . Korzystając z równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, wyznacz równanie ogólne tej prostej.

- a)  $P(0, -4)$ ,  $Q(3, 1)$       b)  $P(\sqrt{5}, -3)$ ,  $Q(\sqrt{5}, 8)$   
 c)  $P(2, 2)$ ,  $Q(1, 0)$       d)  $P(3, 1)$ ,  $Q(-1, -7)$

6.43. Dane jest równanie ogólne prostej. Podaj miarę kąta, jaki tworzy ta prosta z osią  $OX$ .

- a)  $x + y - 7 = 0$       b)  $\sqrt{3}x - y + 90 = 0$       c)  $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$   
 d)  $\sqrt{3}x - 3y + 15 = 0$       e)  $x - \sqrt{3} = 0$       f)  $3y - \sqrt{3} = 0$

6.44. Dane są równania ogólne prostych  $k$  i  $m$ . Czy proste  $k$  i  $m$  są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

- a)  $k: 2x - 3y + 6 = 0$ ,  $m: -x + 1\frac{1}{2}y - 2 = 0$   
 b)  $k: 3x - 4 = 0$ ,  $m: 2y + 5 = 0$   
 c)  $k: 7x + 21y - 3 = 0$ ,  $m: x - 3y - 1 = 0$   
 d)  $k: 2x + 7 = 0$ ,  $m: 3x - 5 = 0$

6.45. Napisz równanie ogólne prostej  $m$  równoległej do prostej:

- a)  $k: 3x - 2y + \sqrt{3} = 0$  i przechodzącej przez punkt  $P(-1, 1)$   
 b)  $k: 4x + 9y = 0$  i przecinającej oś  $OY$  w punkcie  $P(0, 5)$   
 c)  $k: 2x - 11 = 0$  i przecinającej oś  $OX$  w punkcie  $P(-4, 0)$   
 d)  $k: y - 5 = 0$  i przechodzącej przez punkt  $P(7, \sqrt{2})$

6.46. Dane są równania ogólne prostych  $k$  i  $m$ . Czy proste  $k$  i  $m$  są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.

- a)  $k: 5x - 3y - 2 = 0$        $m: 15x + 25y + 10 = 0$   
 b)  $k: 5x + 7 = 0$        $m: 3y - 2 = 0$   
 c)  $k: 4x - 20y + 30 = 0$        $m: 5x - 3y - 2 = 0$   
 d)  $k: \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0$        $m: 1,5x - 1\frac{1}{3}y + 2\frac{1}{5} = 0$

6.47. Napisz równanie ogólne prostej  $m$  prostopadłej do prostej:

- a)  $k: 5x - y + 3 = 0$  i przechodzącej przez punkt  $P(-1, 2)$   
 b)  $k: y + 4 = 0$  i przechodzącej przez punkt  $P(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$   
 c)  $k: 10x - 7 = 0$  i przechodzącej przez punkt  $P(3, 8)$   
 d)  $k: -3x + 2y = 0$  i przecinającej oś  $OY$  w punkcie  $P(0, 2)$ .

6.48. Oblicz brakujące współczynniki w równaniu ogólnym prostej  $m$ , wiedząc, że

- a) prosta  $m: Ax - 2y + C = 0$  jest równoległa do prostej  $k: 5x + 14y - 1 = 0$  i przechodzi przez punkt  $P(7, 0)$   
 b) prosta  $m: x + 8y + C = 0$  jest równoległa do prostej  $k: -3x + 4y - 5 = 0$  i przechodzi przez punkt  $P(1, -3)$   
 c) prosta  $m: 3x + 8y + C = 0$  jest prostopadła do prostej  $k: 20x + 15y - 7 = 0$  i przechodzi przez początek układu współrzędnych  
 d) prosta  $m: Ax + y + C = 0$  jest prostopadła do prostej  $k: 2x + 4y - 3 = 0$  i przechodzi przez punkt  $P(\frac{1}{2}, 7)$

6.49. Wyznacz równanie ogólne symetralnej odcinka  $AB$ .

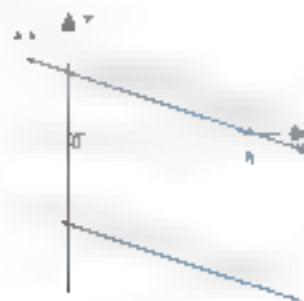
- a)  $A(-4, 5)$ ,  $B(6, 1)$       b)  $A(0, 7)$ ,  $B(0, 3)$   
 c)  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 2)$       d)  $A(1, 8)$ ,  $B(5, 8)$

6.50. Wyznacz liczbę  $a$ , dla której proste  $k: 3ax + 4y - 8 = 0$  oraz  $m: (a + 3)x + 2y - 9 = 0$  są równoległe.

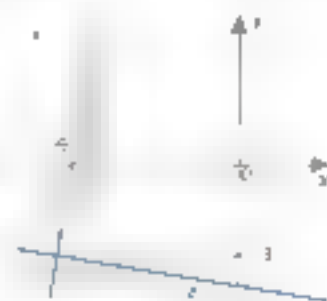
6.51. Wyznacz liczbę  $a$ , dla której proste  $k: -ax + (3 + a)y + 6 = 0$  oraz  $m: (a + 1)x + y + 2 = 0$  są prostopadłe.

6.52. Na podstawie danych na rysunku poniżej, wyznacz współczynniki  $A$  i  $B$  w równaniu ogólnym prostej  $l$ .

a)



b)



## Równanie okręgu

6.53. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$  w postaci kanonicznej.

- a)  $S(0, 0)$ ,  $r = 3$       b)  $S(0, 2)$ ,  $r = \sqrt{5}$       c)  $S(4, 0)$ ,  $r = 2,5$   
 d)  $S(-3, 1)$ ,  $r = \sqrt{2}$       e)  $S(3, -2)$ ,  $r = \frac{2}{3}$       f)  $S(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ ,  $r = 4$

6.54. Poniższe równania opisują okrąg o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$ . Podaj współrzędne punktu  $S$  i promień tego okręgu.

- a)  $x^2 + y^2 = 1$       b)  $(x - 1)^2 + y^2 = 2,25$   
 c)  $(1 + x)^2 + (2 - y)^2 = 25$       d)  $(-x - 3)^2 + (-1 - y)^2 = 81$

6.55. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu opisanego równaniem

- a)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$       b)  $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 33 = 0$   
 c)  $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$       d)  $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y - 6 = 0$   
 e)  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$       f)  $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$

6.56. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu opisanego równaniem

- a)  $x^2 + y^2 - x - 0,5y - \frac{59}{16} = 0$       b)  $x^2 + y^2 - 8y - 6 = 0$   
 c)  $x^2 + y^2 + x - \frac{1}{2}y - \frac{11}{16} = 0$       d)  $x^2 + y^2 - 3x + y - 1,5 = 0$

6.57. Czy równanie  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$  opisuje okrąg? Odpowiedź uzasadnij.

6.58. Dane jest równanie okręgu oraz punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Sprawdź algebraicznie, które z tych punktów należą do okręgu. Następnie narysuj okrąg w układzie współrzędnych i zaznacz punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

- a)  $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ,  $A(-1, 7)$ ,  $B(1, 3)$ ,  $C(2, 6)$   
 b)  $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 16 = 0$ ,  $A(-4, 0)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(-5, -1)$

6.59. Punkt  $A$  należy do okręgu o środku w punkcie  $S$ . Napisz równanie tego okręgu.

- a)  $S(0, 0)$ ,  $A(3, 4)$       b)  $S(2, 1)$ ,  $A(4, 2)$   
 c)  $S(-3, 2)$ ,  $A(3, 10)$       d)  $S(-2, 1)$ ,  $A(4, 7)$

6.60. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiory.

$$A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0\};$$

$$B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x + y - 2x - 2y - 14 = 0\}$$

a następnie wyznacz zbiory:  $A \cup B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ ,  $A \cap B$ .

6.61. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty  $A$  i  $B$ , jeśli jego środek należy do prostej  $k$ .

- a)  $A(5, 10)$ ,  $B(3, 12)$ ,  $k: y = -2x + 2$       b)  $A(6, 4)$ ,  $B(-1, 3)$ ,  $k: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$   
 c)  $A(3, 0)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $k: y = 2x + 4$       d)  $A(7, 4)$ ,  $B(5, 12)$ ,  $k: y = x - 5$

6.62. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  jeśli

- a)  $A(1, 0)$ ,  $B(7, 0)$ ,  $C(0, 1)$       b)  $A(1, 3)$ ,  $B(5, 1)$ ,  $C(4, 4)$   
 c)  $A(1, 5)$ ,  $B(8, 2)$ ,  $C(9, 1)$       d)  $A(-14, -1)$ ,  $B(3, 16)$ ,  $C(1, 4)$

6.63. Udowodnij, że jeśli  $a \neq b$ , to równanie  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 0,75a^2 - 2ab = 0$  opisuje okrąg. Podaj współrzędne środka  $S$  i promień  $r$  okręgu.

## Wyznaczanie w układzie współrzędnych punktów wspólnych prostych, okręgów i parabol

6.64. Rozwiąż algebraicznie układ równań i przedstaw jego interpretację graficzną.

a)  $\begin{cases} x + y = 1 \\ y = x^2 - 8x + 9 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = -2(x-1)^2 + 6 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} y = 0,5x - 2x + 2 \\ -2x + y = 11 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 4 \\ -5x + 2y = -4 \end{cases}$

6.65. Rozwiąż algebraicznie układ równań i przedstaw jego interpretację graficzną.

a)  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 8 \\ x-2=y \end{cases}$

b)  $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ x+y=6 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 = 17 \\ 5x-3y=26 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 8 \\ 4x-y=2 \end{cases}$

6.66. Przedstaw interpretację graficzną danego układu równań w układzie współrzędnych. Następnie rozwiąż ten układ algebraicznie.

a)  $\begin{cases} 3x+y=13 \\ y=x^2-5x+7 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y+8=0 \\ x-3y=4 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x+y-4x-2y+1=0 \\ y-2x=5 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} y+x-8x-14=0 \\ y-4x=22 \end{cases}$

6.67. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych (o ile istnieją) prostej  $k$  i okręgu  $o$ .

a)  $k: y = \frac{1}{3}x - 1, \quad o: x^2 + y^2 = 9$

b)  $k: y = 1, \quad o: (x+5)^2 + y^2 = 3$

c)  $k: x - y = x + 8, \quad o: x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

d)  $k: x - 2y + 4 = 0, \quad o: x^2 + y^2 - 8x - 4y - 19 = 0$

Czy prosta  $k$  jest styczną do okręgu, jest rozłączna z okręgiem, czy jest styczną do tego okręgu?

6.68. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych (o ile istnieją, proste  $k$  i paraboli  $p$ .

a)  $k: x + y = 0, \quad p: y = x^2 - 2$

b)  $k: y = x + 3, \quad p: y = 2x^2 - 8x + 4$

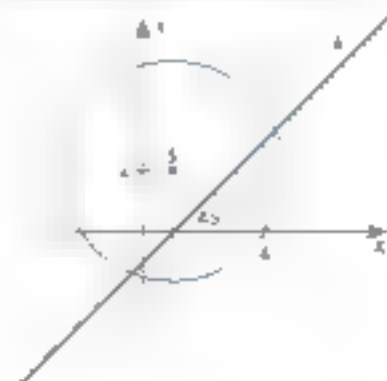
c)  $k: x - 2y + 7 = 0, \quad p: y = \frac{1}{2}x^2 + 11$

d)  $k: 2x - y - 11 = 0, \quad p: y = x^2 - 6x + 5$

6.69. Zapisz równania dwóch krzywych znajdujących się na rysunku poniżej. Następnie oblicz współrzędne punktów wspólnych tych krzywych, wiedząc, że rysunek przedstawia:

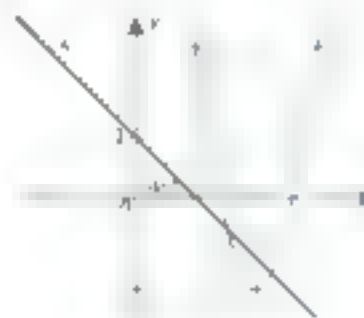
a) okrąg o środku  $S$  i prostą  $k$

b) okrąg o środku  $S$  i prostą  $k$



c) parabolę  $p$  i prostą  $k$

d) parabolę  $p$  i prostą  $k$



6.70. Przedstaw w układzie współrzędnych zbiór wszystkich punktów, których współrzędne spełniają równanie:

a)  $y^2 - x = 0$

b)  $y = (x + 3)^2$

c)  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$

d)  $x^2 + 15y^2 = 8xy$

e)  $2x^2 = xy$

f)  $4(x + 1)^2 - (y - 1)^2 = 0$

**6.71** Rozwiąż algebraicznie układ równań. Następnie przedstaw jego interpretację graficzną w układzie współrzędnych.

a) 
$$\begin{cases} x' + y' - 6y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x - y - 2x - 6y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 16 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 4y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0 \end{cases}$$

**6.72** Rozwiąż algebraicznie układ równań. Następnie przedstaw jego interpretację graficzną w układzie współrzędnych.

a) 
$$\begin{cases} (2x - y + 8)(x + 2y + 9) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 0,5x + 3 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 5 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 11 = 0 \\ 4x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} 3y^2 + 2xy = 9y \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} y - x - 3x = 0 \\ (y - 1)^2 = 2x + 3 \end{cases}$$

### Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej

**6.73.** Dane są punkty  $A(-6, 3)$  oraz  $B(0, 5)$ . Na prostej  $k: x - 2y - 4 = 0$  wyznacz współrzędne punktu  $C$ , który jest równoodległy od punktów  $A$  i  $B$ .

**6.74.** Dane są punkty  $A(0, 2)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $C(6, 2)$ . Wyznacz:

- równania symetralnych odcinków  $AB$  i  $BC$
- współrzędne punktu przecięcia się tych symetralnych,
- odległość punktu przecięcia się tych symetralnych od punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

**6.75.** Boki trójkąta zawierają się w prostych  $k: x - 3y + 5 = 0$ ,  $l: x + 2y - 5 = 0$  i  $m: 3x + y - 5 = 0$ .

- Wykaż, że trójkąt jest prostokątny.
- Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

**6.76.** Dane są punkty  $A(-4, 2)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(2, 4)$ ,  $D(-3, 3)$ . Oblicz współrzędne punktu przecięcia się przekątnych tego czworokąta.

**6.77.** Prosta  $k: y = -3x - 8$  przecina okrąg o środku w punkcie  $S(0, 0)$  promieniu 5 w punktach  $A$  i  $B$ . Oblicz:

- współrzędne punktów  $A$  i  $B$
- długość cięciwy  $AB$

**6.78.** Prosta  $k: x - y + 1 = 0$  przecina parabolę  $p: y = 0,5x^2 + 5$  w punktach  $A$  i  $B$ . Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek  $AB$ .

**6.79.** Punkty  $A(-4, 0)$ ,  $B(4, 4)$ ,  $C(-5, 7)$  są wierzchołkami trójkąta. Odcinek  $CD$  jest wysokością tego trójkąta. Oblicz:

- współrzędne punktu  $D$
- długość wysokości  $CD$ .

**6.80.** Punkty  $A(-4, 3)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 5)$  są wierzchołkami trójkąta. Wyznacz:

- równania prostych zawierających wysokości poprowadzone z wierzchołków  $A$  i  $C$ ,
- punkt przecięcia się wysokości trójkąta (ortocentrum).

**6.81.** Dany jest okrąg  $\alpha: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ .

- Wykaż, że prosta  $k: y - 6 = 0$  jest styczną do okręgu. Oblicz współrzędne punktu styczności.
- Wyznacz na stycznej punkty, których odległość od środka okręgu jest równa 5. Oblicz odległość tych punktów od punktu styczności.

**6.82.** Dana jest parabola  $p: y = x^2 - 3$ .

- Wyznacz współrzędne punktów  $A$  i  $B$  będących punktami przecięcia się paraboli  $p$  z prostą  $k: x - y + 3 = 0$ .
- Wyznacz współrzędne punktów  $C$  i  $D$  będących punktami przecięcia się paraboli  $p$  z prostą  $m: y + 2x = 0$ .
- Wykaż, że odcinki  $AB$  i  $CD$  przecinają się w środku odcinka  $CD$ .

**6.83.** Dany jest okrąg  $\alpha: x^2 + y^2 - 6y = 0$  oraz punkt  $A(0, 6)$ .

- Wykaż, że punkt  $A$  należy do okręgu  $\alpha$ .
- Wyznacz równanie prostej  $k$  nachylonej do osi  $OX$  pod kątem  $60^\circ$  i przechodzącej przez punkt  $A$ .
- Oblicz współrzędne punktu  $B$ , będącego drugim punktem przecięcia prostej  $k$  z danym okręgiem.
- Wyznacz na okręgu punkt  $C$  tak, aby trójkąt  $ABC$  był równoboczny.



6.84 Punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  należą do paraboli  $p: y = \frac{1}{4}(x-4)^2$  są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Wiedząc, że punkt  $C$  jest wierzchołkiem paraboli oraz  $\angle ACB = 120^\circ$ , wyznacz współrzędne punktów  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

6.85 Punkty  $A(1, -1)$ ,  $B(3, 5)$  i  $C(7, 11)$  są wierzchołkami trójkąta. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

6.86 Oblicz odległość środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach  $A(1, 7)$ ,  $B(-5, 1)$ ,  $C(7, -5)$ , od środka ciężkości tego trójkąta.

6.87 Dany jest punkt  $C(0, 5)$  oraz prosta  $k: x - 4y + 8 = 0$ . Wyznacz na prostej  $k$  punkty  $A$  i  $B$  tak, aby  $|AC| = |BC| = 4\sqrt{2}$ .

6.88. Dany jest równanie sumy dwóch prostych  $x - 9y = 0$  w których zawierają się przekątne prostokąta. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta wiedząc, że długość przekątnych jest równa 10.

6.89 Dane są punkty  $A(-2, 1)$ ,  $B(4, 1)$ . Wyznacz na prostej  $k: 3x - 2y = 0$  punkt  $C$  taki, że  $\angle ACB = 90^\circ$ .

6.90 Dane są dwa wierzchołki trójkąta  $ABC$ :  $A(-4, 1)$ ,  $B(4, -1)$ . Wysokość  $AD$  trójkąta  $ABC$  zawiera się w prostej  $k: x - 2y + 2 = 0$ .

a) Wyznacz współrzędne punktu  $D$ .

b) Wiedząc dodatkowo, że  $|AB| = |AC|$  oblicz współrzędne punktu  $C$ .

6.91 Jedną z przekątnych kwadratu  $ABCD$  zawiera się w prostej  $k: 2x - y = 0$ . Wiedząc, że  $A(1, -3)$ , wyznacz współrzędne wierzchołków  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

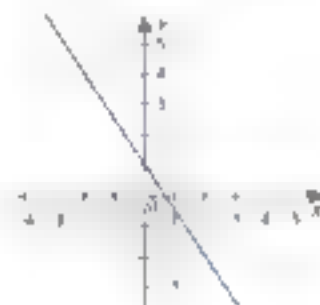
### Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Dane są trzy kolejne wierzchołki równoległoboku  $ABCD$ :  $A(2, -2)$ ,  $B(4, 2)$ ,  $C(-2, 3)$ . Wówczas wierzchołek  $D$  ma współrzędne:

- A.  $(0, 7)$       B.  $(-4, -1)$       C.  $(8, -3)$       D.  $(-5, 0)$

2. Prosta  $k$  na rysunku poniżej można opisać równaniem kierunkowym  $y = ax + b$ . Wówczas:

- A.  $a = -2$       B.  $a = 1/5$       C.  $a = 1$       D.  $a = 1$



3. Do prostej  $k$  należą punkty  $(-1, 2)$  oraz  $(1, -4)$ . Zatem prostą  $k$  opisuje równanie:

- A.  $y = 2x - 4$       B.  $y = x - 1$       C.  $x + y = 0$       D.  $x + 2y - 4 = 0$

4. Wskaż równanie prostej, równoległej do prostej  $k: 2x - y + 4 = 0$ .

- A.  $4x + 2y = 0$       B.  $2x + y - 4 = 0$       C.  $2x - 4 = 0$       D.  $x + 2y + 4 = 0$

5. Wskaż równanie prostej, prostopadłej do prostej  $k: y = 4x - 1$ .

- A.  $y = 4x + 1$       B.  $y = -4x - 1$       C.  $y = 0,25x + 1$       D.  $y = -0,25x - 1$

6. Równanie  $y^2 = 4(x - 3)^2$  opisuje:

- A. okrąg o środku w punkcie  $(3, 0)$  i promieniu 4  
B. okrąg o środku w punkcie  $(3, 0)$  i promieniu 2  
C. parabolę, której wierzchołkiem jest punkt  $(3, 4)$   
D. sumę dwóch prostych:  $y = -x + 5$  oraz  $y = x + 1$

7. Proste  $k: -2x + y - 3 = 0$  oraz  $m: 3x + y + 2 = 0$  przecinają się w punkcie o współrzędnych:

- A.  $(1, 5)$       B.  $(-2, 3)$       C.  $(5, 13)$       D.  $(-1, 1)$

8. Kąt nachylenia prostej  $k: \sqrt{3}x + 3y - 1 = 0$  do osi  $Ox$  jest równy:

- A.  $30^\circ$       B.  $60^\circ$       C.  $120^\circ$       D.  $150^\circ$

9. Wskaż równanie ogólne prostej, której nie można opisać równaniem kierunkowym.

- A.  $y + 5 = 0$       B.  $x - \sqrt{2} + 1 = 0$       C.  $2x + \sqrt{3}y = 0$       D.  $2y - \sqrt{5} + 2 = 0$

10. Dane są punkty  $A(-3, 4)$ ,  $B(6, 7)$ . Punkt  $P$  należy do odcinka  $AB$  oraz  $|AP| : |PB| = 1 : 2$ . Zatem:

- A.  $P(3, 6)$       B.  $P(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$       C.  $P(0, 5)$       D.  $P(-1, 4\frac{2}{3})$

11. Wskaż równanie prostej, prostopadłej do prostej  $k: x - 2y + 4 = 0$  przechodzącej przez punkt  $(0, 3)$ :

- A.  $4x + 2y - 6 = 0$       B.  $2x + y + 3 = 0$   
C.  $x - 2y - 3 = 0$       D.  $0,5x + y - 3 = 0$

12. Dane jest równanie okręgu  $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ . Promień tego okręgu jest równy:

- A.  $\sqrt{2}$       B. 2      C. 6      D.  $4\sqrt{2}$

13. Odległość punktu  $A(-2, 1)$  od środka okręgu  $\sigma: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$  jest równa:

- A.  $\sqrt{17}$       B. 3      C.  $2\sqrt{5}$       D. 5

14. Układ równań  $\begin{cases} x' - y' = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

- A. ma jedno rozwiązanie      B. ma dwa rozwiązania  
C. nie ma rozwiązań      D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

15. Prosta  $k: y = 2x + 1$  przecina parabolę  $p: y = (x - 1)^2$  w punktach  $A$  i  $B$ . Środek odcinka  $AB$  ma współrzędne:

- A.  $(0, 5)$       B.  $(2, 5)$       C.  $(1, 3)$       D.  $(1, 5)$

## Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6

16. Punkt  $S(2, 1)$  jest środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ , a punkt  $D(1, 3)$  jest środkiem odcinka  $AB$ . Oblicz współrzędne punktu  $C$ .

D 17. Dane są punkty  $A(-3, 1)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(1, 7)$ ,  $D(-5, 2)$ . Wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem.

D 18. Dane są punkty  $A(-6, 1)$ ,  $B(-3, -2)$ ,  $C(4, 1)$ ,  $D(-5, 4)$ . Wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest prostokątem.

D 19. Dane są punkty  $A(-6, 1)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(-4, 4)$ . Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest trójkątem prostokątnym równoramiennym.

20. Wyznacz równanie:

- a) prostej, równoległej do prostej  $k: 2x - 3y - 1 = 0$  i przechodzącej przez punkt  $P(-1, 2)$ ,  
b) prostej, prostopadłej do prostej  $k: x - 5y - 7 = 0$  i przechodzącej przez punkt  $P(3, 1)$ .

21. Wyznacz równanie prostej, nachylonej do osi  $Ox$  pod kątem  $45^\circ$  i przechodzącej przez punkt  $P$ , jeśli:

- a.  $\alpha = 30^\circ$ ,  $P(-3, -1)$       b.  $\alpha = 120^\circ$ ,  $P(-6, 8)$       c)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $P(9, 1)$

22. Wyznacz równanie ogólne prostej, do której należą punkty:

- a)  $A(5, -6)$ ,  $B(2, 8)$       b)  $A(-3, 9)$ ,  $B(-3, 12)$

23. Wyznacz równanie symetralnej odcinka  $AB$ , jeśli  $A(-2, 0)$ ,  $B(7, 3)$ .

24. Dane są proste  $k: mx + 2y - 4 = 0$  oraz  $m: 8x + ay - 12 = 0$ . Wyznacz liczbę  $a$ , dla której te proste:

- a) są równoległe      b) są prostopadłe

Sprawdź, czy dla wyznaczonej liczby  $a$  istnieje postać kierunkowa równania prostej  $k$  i równania prostej  $m$ .

25. Doprowadź równanie okręgu  $\sigma: x^2 + y^2 - 8x - 6y - 5 = 0$  do postaci kanonicznej. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

D 26. Dane są punkty  $A(-4, 5)$ ,  $B(2, 5)$ ,  $C(2, 1)$ . Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  ma współrzędne  $(-1, 4)$ , a jego promień jest równy  $\sqrt{13}$ .

27. Dane są punkty  $A(-4, 0)$ ,  $B(2, -2)$  oraz prosta  $k: x + y - 6 = 0$ . Wyznacz na prostej  $k$  punkt  $C$  tak, aby  $|AC| = |BC|$ .

28. Dany jest punkt  $C(-4, 4)$  oraz prosta  $k: x - 5y + 1 = 0$ . Wyznacz na prostej  $k$  punkty  $A$  i  $B$  spełniające warunek:  $|AC| = |BC| = \sqrt{13}$ .

29. Dane są punkty  $A(-2, 6)$ ,  $B(-4, 0)$ . Wyznacz na osi  $Oy$  punkt  $C$  tak, że  $\angle ACB = 90^\circ$ .

30. Prosta  $k: y = 3 - x$  przecina parabolę  $p: y = x^2 + 6x + 9$  w punktach  $A$  i  $B$ .

a) Oblicz współrzędne punktów  $A$  i  $B$ .

b) Wykaż, że os symetrii paraboli przecina odcinek  $AB$  w punkcie, który dzieli ten odcinek w stosunku  $3 : 2$ .

31. Rozwiąż dany układ algebraiczny. Następnie przedstaw ilustrację graficzną tego układu.

a) 
$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 3 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 20 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ x^2 + x - 4x + 1 \end{cases}$$

32. Rozwiąż dany układ algebraiczny. Następnie przedstaw ilustrację graficzną tego układu.

a) 
$$\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 = 9 \\ 4y^2 = (x+2)^2 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

33. Proste  $k: y = x$  oraz  $m: y = -x + 8$  przecinają się w punkcie  $A$ , należącym do paraboli  $p: y = a(x-2)^2$ .

a) Oblicz współrzędne punktu  $A$  oraz współczynnik  $a$ .

b) Każda z prostych  $k$  i  $m$  przecina parabolę  $p$  w drugim punkcie: prosta  $k$  w punkcie  $B$ , prosta  $m$  w punkcie  $C$ . Oblicz współrzędne tych punktów.

c) Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

34. Punkt wspólny prostych  $k: y = 2x + 1$  oraz  $m: y = -2x + 1$  jest punktem przecięcia się przekątnych prostokąta  $ABCD$ . Wykaż, że przekątne prostokąta mają długość 10, oblicz współrzędne jego wierzchołków.

35. Dwa okręgi  $\sigma_1: x^2 + y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$  oraz  $\sigma_2: x^2 + y^2 - 4x + 12y + 23 = 0$  przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ .

a) Oblicz współrzędne tych punktów.

b) Wykaż, że cosinus kąta nachylenia prostej  $AB$  do osi  $Ox$  jest równy  $-\frac{1}{5}$ .

## 7. Geometria płaska – rozwiązywanie trójkątów, pole trójkąta, pole koła

### Twierdzenie sinusów

7.1. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , jeśli:

a)  $|AC| = 3$  oraz  $|\angle CBA| = 60^\circ$

b)  $|BC| = 4$  oraz  $|\angle BAC| = 150^\circ$

c)  $|A| = 72^\circ$ ,  $|B| = 63^\circ$ ,  $|AB| = 8$

d)  $|\angle B| + |\angle C| = 150^\circ$ ,  $|BC| = 13$ .

7.2. W trójkącie  $ABC$  kąty są odpowiednio równe  $\alpha$ ,  $\beta$  a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $R$ . Oblicz:

a) długość boku  $AB$ , jeśli  $\alpha = 28^\circ$ ,  $\beta = 32^\circ$  oraz  $R = 8$  cm,

b) długość boku  $AC$ , jeśli  $\alpha = 65^\circ$ ,  $\gamma = 83^\circ$  oraz  $R = 10$  cm.

7.3. W trójkącie  $ABC$  kąty są odpowiednio równe  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Oblicz:

a) długość boku  $AC$ , jeśli  $\alpha = 48^\circ$ ,  $\gamma = 70^\circ$ ,  $|BC| = 5$  cm,

b) długość boku  $AB$ , jeśli  $\alpha = 17^\circ$ ,  $\gamma = 32^\circ$ ,  $|AC| = 7,55$  cm.

7.4. W trójkącie kąty są odpowiednio równe  $\alpha$ ,  $\beta$  a bok naprzeciw kąta  $\alpha$  ma odpowiednio długość  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Oblicz:

a)  $b$ , jeśli:  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$  i  $\cos \beta = \frac{3}{5}$  oraz  $a = 8$  cm

b)  $c$ , jeśli:  $\cos \alpha = -0,174$  i  $\cos \gamma = 0,719$  oraz  $a = 19,7$  cm

7.5. W trójkącie  $ABC$  bok  $AB$  ma długość  $c$ , a kąty trójkąta przylegające do boku  $AB$  są równe  $\alpha$  i  $\beta$ . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli:

a)  $c = 8$  cm i  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$  b)  $c = 13,5$  cm i  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

c)  $c = 20$  cm i  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{5}{13}$  d)  $c = 15$  cm i  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{8}{17}$

7.6. Bok trójkąta leżący naprzeciw kąta  $\alpha$  ma odpowiednio długość  $a$ . Na trójkącie opisano okrąg o promieniu  $R$ . Oblicz:

- a)  $R$ , jeśli  $\lg \frac{3}{4} = c = 6 \text{ cm}$   
 b)  $a$ , jeśli  $\lg \alpha = \frac{9}{15}$ ,  $\cos \frac{2\sqrt{2}}{3} = c = 17 \text{ cm}$   
 c)  $c$ , jeśli  $\sin \alpha = 1$ ,  $\cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b = 9,66 \text{ cm}$   
 d)  $b$ , jeśli  $\lg \alpha = \sqrt{3}$ ,  $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $c = 19,32 \text{ cm}$ .

7.7. W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $AC = 3\sqrt{3}$ ,  $BC = 3$  oraz  $A = 30^\circ$ . Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

7.8. W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $AB = 12$ ,  $AC = 6\sqrt{2}$  oraz  $A = 30^\circ$ . Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

7.9. W trójkącie równoramiennym równobokowym najdłuższy bok ma długość 6. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $2\sqrt{3}$ , oblicz:

- a) miary kątów trójkąta      b) obwód tego trójkąta.

7.10. W trójkącie równobokowym  $ABC$  dane są długości boków  $|AB| = 3\sqrt{2}$ ,  $|BC| = 3 - \sqrt{3}$ ,  $|AC| = 2\sqrt{3}$ . Wyznacz:

- a) miarę kąta  $ACB$   
 b) promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

**D 7.11.** Wykaż, że jeśli dwa kąty trójkąta mają przód  $\alpha$  i  $\beta$  to długość dwóch boków tego trójkąta jest równa promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie.

**D 7.12.** Dane są dwa trójkąty  $ABC$  oraz  $A_1B_1C_1$  takie że  $\angle A = \angle A_1$  oraz  $\angle C = 180^\circ$ .

Wykaż, że  $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|}$ .

**D 7.13.** Wykaż, że jeśli promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy długości jednego z boków trójkąta, to kąt między tym bokiem a naprzeciw niego boku ma miarę  $30^\circ$  lub  $150^\circ$ .

## Twierdzenie cosinusów

7.14. Dane są długości boków  $a$ ,  $b$  oraz kąt między tymi bokami równy  $\alpha$ . Oblicz długość trzeciego boku, jeśli:

- a)  $a = 5$ ,  $b = 9$ ,  $\alpha = 60^\circ$       b)  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = 6$ ,  $\alpha = 45^\circ$

7.15. Bok trójkąta  $ABC$  mają długości  $AB = 8 \text{ cm}$ ,  $BC = 6 \text{ cm}$ ,  $AC = 5 \text{ cm}$ . Oblicz cosinusy kątów tego trójkąta. Czy trójkąt ten jest ostrokatny, prostokątny, czy rozwartokątny?

7.16. Dane są długości boków trójkąta. Sprawdź, czy trójkąt jest ostrokatny, prostokątny czy rozwartokątny. Podaj miarę największego kąta tego trójkąta.

- a)  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 9 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$   
 b)  $a = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $c = 14 \text{ cm}$   
 c)  $a = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $b = \sqrt{26} \text{ cm}$ ,  $c = 3\sqrt{2} \text{ cm}$

7.17. Długości boków trójkąta  $ABC$  są równe  $AB = \sqrt{14} \text{ cm}$ ,  $AC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$  oraz  $|BC| = \sqrt{2} \text{ cm}$ . Wyznacz miarę kąta przy wierzchołku  $C$ .

7.18. Bok trójkąta  $ABC$  mają długości  $BC = 5$ ,  $AB = 2\sqrt{2} + 1$  oraz  $AC = 2\sqrt{2} - 1$ . Oblicz miarę kąta przy wierzchołku  $A$ .

7.19. Bok równoległoboku ma długości  $a$ ,  $b$  a kąt  $\alpha$  jest równy  $\gamma$ . Oblicz długość przekątnych tego równoległoboku, jeśli:

- a)  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $\gamma = 45^\circ$       b)  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 30^\circ$

7.20. Dwa boki trójkąta  $ABC$  mają długości  $AB = 2 \text{ cm}$ ,  $BC = 8 \text{ cm}$ . Wiedząc, że  $\angle C = 60^\circ$ , oblicz długość boku  $AC$ .

7.21. W trójkącie  $ABC$  dwa boki mają długości  $AB = 2 \text{ cm}$ ,  $AC = 4 \text{ cm}$ . Długość kąta  $BAC$  jest równy  $\frac{\pi}{4}$ .

- D a)** Wykaż, że jeśli kąt  $BAC$  jest ostry, to trójkąt  $ABC$  jest równoramienny.  
**b)** Oblicz długość boku  $BC$  w przypadku, gdy  $\angle BAC \in (90^\circ, 180^\circ)$ .

7.22. W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $AC = 6 \text{ cm}$ ,  $BC = 4 \text{ cm}$  oraz  $\sin \angle ACB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .

**7.23.** W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $|AC| = 4$ ,  $|BC| = |AB| = 2$  oraz  $|\angle C| = 60^\circ$ . Oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .

**7.24.** W trójkącie  $ABC$  bok  $AC$  jest o  $6\text{ cm}$  dłuższy od boku  $AB$  oraz  $|BC| = 5\sqrt{2}\text{ cm}$ . Wiedząc, że  $|\angle ABC| = 135^\circ$ , oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

**7.25.** W trójkącie  $ABC$  boki mają długość  $|AB| = 10\text{ cm}$ ,  $|BC| = 2\sqrt{2}\text{ cm}$ ,  $|AC| = 8\text{ cm}$ . Oblicz długości środkowych  $CD$  i  $BE$ .

**7.26.** Boki trójkąta  $ABC$  mają długość  $|AB| = 8\text{ cm}$ ,  $|BC| = 15\text{ cm}$  oraz  $|AC| = 12\text{ cm}$ . Oblicz:

- długość środkowej  $CD$ ,
- promień okręgu opisanego na trójkącie  $ADC$ .

**7.27.** Dwa boki trójkąta  $ABC$  mają długość  $|AC| = 10\text{ cm}$ ,  $|BC| = 6$ . Wiedząc, że  $|\angle ACB| = 60^\circ$ , oblicz długość środkowej  $CD$ .

**7.28.** W trójkącie prostokątnym równoramiennym  $ABC$  ( $|AC| = |AB|$ ) poprowadzono środkowe  $CD$ ,  $BE$ , które przecięły się w punkcie  $M$ . Wykaz, że  $\cos \angle DMB = \frac{4}{5}$ .

**7.29.** Na boku  $BC$  trójkąta równobocznego  $ABC$  wybrano punkt  $P$  tak, że  $|BP| = \frac{1}{3}|BC|$ . Wykaz, że  $\cos$  kąt  $\angle PAC$  jest równy  $\frac{2}{7}$ .

## Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów do rozwiązywania zadań

**7.30.** Rozwiąż trójkąt  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC| = |AB| = 10$  a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $8,5$ .

**7.31.** Rozwiąż trójkąt  $ABC$ , w którym:

- $|AC| = 72$ ,  $|BC| = 73$ ,  $|\angle A| = 49^\circ$
- $|AC| = 72$ ,  $|BC| = 70$ ,  $|\angle A| = 49^\circ$

**7.32.** Rozwiąż trójkąt  $ABC$ , w którym:

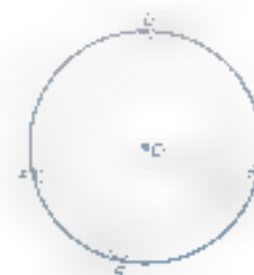
- $|BC| = 178$ ,  $|AC| = 89$ ,  $|\angle B| = 30^\circ$
- $|BC| = 160$ ,  $|AC| = 89$ ,  $|\angle B| = 30^\circ$ .

**7.33.** Wykaz, że nie istnieje trójkąt  $ABC$ , w którym  $|BC| = 179$ ,  $|AC| = 89$  oraz  $|\angle B| = 30^\circ$ .

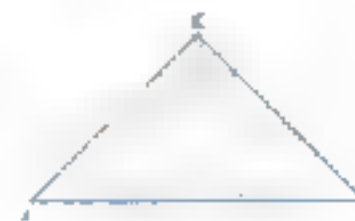
**7.34.** Boki trójkąta mają długość  $a$ ,  $b$  i kąty są odpowiednio równe  $\alpha$ ,  $\beta$  oraz  $R$  jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli:

- $a = \sqrt{5}$ ,  $b = 2$ ,  $\beta = 45^\circ$
- $a = 2$ ,  $b = \sqrt{2}$ ,  $\alpha = 45^\circ$
- $R = c = 5$ ,  $\alpha = 60^\circ$
- $R = 3$ ,  $a = \sqrt{27}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $c < b$

**7.35.** Na rysunku obok punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  należą do okręgu o środku  $O$  oraz  $|AD| = |DC|$ . Wiedząc, że  $|BC| = 8$ ,  $|AC| = |AB| + 6$ ,  $|\angle ABC| = 120^\circ$ , oblicz obwód czworokąta  $ABCD$ .



**7.36.** W trójkącie prostokątnym równoramiennym  $ABC$  przyprostokątne mają długość  $|AC| = |BC| = \sqrt{2}$ . Punkty  $D$ ,  $E$  należą do przeciwprostokątnej  $AB$  oraz  $|\angle ACD| = |\angle DCE| = |\angle ECB|$ . Oblicz długości odcinków  $AD$ ,  $DE$ ,  $EB$ .



**7.37.** Wykaz, że jeśli  $\alpha$  i  $\beta$  są miarami dwóch kątów trójkąta z  $R$  jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, to obwód trójkąta jest równy  $2R \sin \alpha + 2R \sin \beta + 2R \sin \gamma$ .

**7.38.** Boki trójkąta mają długość  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , a kąty są odpowiednio równe  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Wykaz, że jeśli  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ , to  $\cos \beta = \cos^2 \alpha$ .

**7.39.** W trójkącie  $ABC$  poprowadzono środkową  $CD$ . Wykaz, że jeśli  $|\angle BCD| = 60^\circ$ , to  $|AC|^2 - |BC|^2 = |AB| \cdot |CD|$ .

**7.40.** Kąty trójkąta  $ABC$  są odpowiednio równe  $\alpha$ ,  $\beta$ . Wykaz, że jeśli  $\frac{|BC|}{|AC|} = \sqrt{2}$ , to  $2\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = 1$ .



**D 7.41** Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.

**D 7.42** W trójkącie  $ABC$  dane są kąty  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle BCA = \beta$ . Dwusieczna kąta

$\angle ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Wykaż, że  $\frac{AD}{DB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .

**D 7.43** W trójkącie boki mają długość  $a, b, c$ , a kąty są odpowiednio równe  $\alpha, \beta, \gamma$ . Wykaż, że jeśli  $a \cdot \cos \beta = b \cdot \cos \alpha$ , to ten trójkąt jest równoramienny.

**D 7.44** Boki trójkąta mają długość  $a, b, c$ , a kąty są odpowiednio równe  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Wykaż, że jeśli  $\frac{a}{c} \sin \alpha = \frac{b}{c} \sin \beta = \sin \gamma$ , to ten trójkąt jest prostokątny.

**D 7.45.** W okrąg wpisano trójkąt równoboczny  $ABC$ . Na okręgu wybrano punkt  $D$ , różny od punktów  $A, B, C$ . Poprowadzono trzy odcinki  $DA, DB, DC$ . Wykaż, że suma długości dwóch krótszych odcinków jest równa długości trzeciego odcinka.



**D 7.46** W trójkącie  $ABC$  dane są  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 15^\circ$ ,  $\angle C = 120^\circ$ ,  $|BC| = 1$ .

a) Oblicz  $|AB|$ ,  $|AC|$ .

b) Wykaż, że  $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ .

c) Wykaż, że  $\lg 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ .

d) Długości przyprostokątnych  $a$  i przeciwprostokątnej prostokątnego spełniają zależność  $a^2 + b^2 = 4ab$ . Wykaż, że kąty ostrego trójkąta są równe  $15^\circ$  i  $75^\circ$ .

**7.47** W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  kąty przy wierzchołkach  $A, B$  są odpowiednio równe  $\alpha, \beta$ . Wiedząc, że suma trzech wysokości tego trójkąta jest równa  $m$ , oblicz długości boków tego trójkąta.

## Pole figury płaskiej

**7.48.** Pole jednej kratki jest równe 1. Oblicz pola poniższych figur.

a)



b)



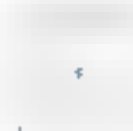
c)



d)



**7.49.** Na rysunku obok dane są trzy figury: kwadrat, trójkąt równoboczny i koło, których pola są odpowiednio równe  $s, t, w$ . Wyraź pola figur umieszczonych poniżej za pomocą pól  $s, t, w$ .



a)



b)



c)



d)



## Pole trójkąta, cz. 1

**7 50** Wyznacz wysokość trójkąta równobocznego, którego pole jest równe  $3\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

**7 51** Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 4 cm dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz:

- a) wysokość trójkąta                      b) pole tego trójkąta.

**7 52** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 20 cm i 21 cm. Oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej.

**7 53** W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 12 cm, dzieląc przeciwprostokątną na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku 4 : 9. Oblicz pole tego trójkąta.

**7 54** Pole trójkąta prostokątnego jest równe  $136 \frac{1}{2} \text{ cm}^2$ , a cosinus jednego z kątów wynosi  $\frac{84}{85}$ . Oblicz długości boków tego trójkąta.

**7 55** W trójkącie prostokątnym cosinus jednego z kątów jest równy  $\frac{12}{13}$ , a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 13 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

**7 56** W trójkącie prostokątnym sinus jednego z kątów jest równy  $\frac{3}{5}$ . Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 7 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

**7 57** W trójkącie równoramiennym długość podstawy wynosi 16 cm, a wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa 15 cm. Oblicz wysokość poprowadzoną na ramię trójkąta.

**7 58** W trójkącie równoramiennym ABC stosunek długości podstawy AB do ramienia BC jest równy  $\frac{4}{5}$ . Wiedząc, że pole trójkąta jest równe 50, oblicz:

- a) długości boków trójkąta,  
b) wysokość poprowadzoną z wierzchołka A.

**7 59** Wysokości trójkąta pozostają w stosunku 20 : 15 : 12.

- D a)** Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny.  
b) Oblicz sumę sinusów wszystkich kątów tego trójkąta.

**7 60** W trójkącie ABC dane są  $AC = 4 \text{ cm}$ ,  $BC = \sqrt{37} \text{ cm}$  oraz  $\angle BAC = 60^\circ$ . Oblicz pole trójkąta ABC.

**7 61** W trójkącie ABC dane są  $BC = 15 \text{ cm}$  oraz  $\sin \angle BAC = \frac{12}{13}$  oraz  $\sin \angle CBA = \frac{10}{13}$ . Oblicz pole trójkąta ABC.

**7 62** Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki mają długość 10 cm i 14 cm, a kąt między nimi jest równy:

- a)  $30^\circ$                       b)  $120^\circ$                       c)  $135^\circ$

**7 63** Dwa boki trójkąta mają długość 10 cm i 12 cm, a jego pole jest równe  $30 \text{ cm}^2$ . Jaką miarę może mieć kąt tego trójkąta między danymi bokami?

**7 64** W trójkącie, którego pole jest równe  $27 \text{ cm}^2$ , dwa boki mają długość 18 cm i 5 cm. Wiedząc, że kąt między danymi bokami jest rozwarty, oblicz:

- a) miarę tego kąta                      b) długość trzeciego boku.

**7 65** W trójkącie ostrokątnym dwa boki mają długość 5 cm i 8 cm. Pole tego trójkąta jest równe  $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Oblicz:

- a) długość trzeciego boku,  
b) wysokość poprowadzoną na trzeci bok tego trójkąta.

**7 66** W trójkącie równoramiennym cosinus jednego z kątów jest równy 0,8. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe  $7,5 \text{ cm}^2$ , oblicz:

- a) długości boków trójkąta                      b) sinus kąta przy podstawie.

**7 67** Pole trójkąta jest równe  $20 \text{ cm}^2$ , a jeden z jego kątów ma miarę  $150^\circ$ . Wiedząc, że wysokości poprowadzone z wierzchołków kątów ostrych pozostają w stosunku 5 : 4, oblicz długości boków trójkąta przy kącie rozwartym.

**D 7.68.** Wierzchołki trójkątów na rysunku obok należą do dwóch przeciwległych boków równolegoboku. Wykaż, że suma pól trójkątów białych jest równa sumie pól trójkątów niebieskich.



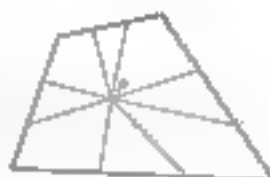
**D 7.69.** Wykaż, że w równolegoboku na rysunku obok suma pól wielokątów niebieskich jest równa sumie pól wielokątów szarych.



**D 7.70.** Punkt  $P$  leży dowolnie wewnątrz trójkąta, jak na rysunku obok. Każdy bok tego trójkąta jest podzielony jednym bokiem odpowiedniego niebieskiego trójkąta na dwa równe odcinki. Wykaż, że suma pól białych trójkątów jest równa sumie pól niebieskich trójkątów.



**D 7.71.** Każdy bok czworokąta jest podzielony dwoma punktami na trzy równe odcinki. Punkt  $P$  jest dowolnym punktem leżącym we wnętrzu czworokąta (zobacz rysunek obok). Wykaż, że suma pól białych czworokątów jest dwa razy większa od sumy pól niebieskich trójkątów.



**7.72.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawa  $AB$  ma długość  $10\text{ cm}$ , a wysokość  $CD$  jest równa  $12\text{ cm}$ . Oblicz pole trójkąta  $ABE$ , jeśli punkt  $E$  należy do boku  $AC$  oraz

a)  $|AE| = |EC|$

b)  $|AE| : |EC| = 2 : 1$ .

**7.73.** W trójkącie  $ABC$  wysokość poprowadzona na podstawę dzieli tę podstawę w stosunku  $3 : 5$ . Wiedząc, że pola powstałych trójkątów różnią się o  $4\text{ cm}^2$ , oblicz pole trójkąta  $ABC$ .

**7.74.** Przekątne czworokąta dzielą ten czworokąt na cztery trójkąty. Dane są pola trzech trójkątów (zobacz rysunek obok). Oblicz:

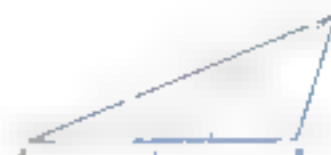
- stosunek długości odcinków, na jakie punkt przecięcia przekątnych dzieli te przekątne,
- pole czwartego trójkąta.



**D 7.75.** W trapezie  $ABCD$ ,  $AB \parallel DC$  poprowadzono przekątną, które przecięły się w punkcie  $P$ . Wykaż, że pola trójkątów  $BCP$  i  $APD$  są równe.

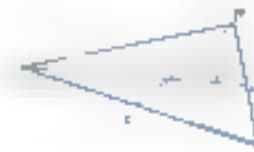
**7.76.** W trapezie  $ABCD$ ,  $AB \parallel DC$  poprowadzono przekątną, która przecięła się w punkcie  $E$ . Pola trójkątów  $ABE$  i  $BCE$  są odpowiednio równe  $78$  i  $52$ . Oblicz pole trójkąta  $CDE$ .

**7.77.** Pole trójkąta  $ABC$  jest równe  $24\text{ cm}^2$ . Środkowa  $CD$  ma długość  $9\text{ cm}$ , a sinus kąta  $BDC$  jest równy  $\frac{2}{3}$ . Oblicz długość boku  $AB$ .



**D 7.78.** W trójkącie poprowadzono środkowe, które podzieliły dany trójkąt na sześć mniejszych trójkątów. Wykaż, że pola powstałych trójkątów są równe.

**7.79.** Środkowe  $CD$  i  $BE$  trójkąta  $ABC$  przecinają się pod kątem  $45^\circ$ , jak na rysunku obok. Wiedząc, że  $|BE| = 12\text{ cm}$  oraz  $|CD| = 21\text{ cm}$ , oblicz pole trójkąta  $ABC$ .



**7.80.** Dwa boki trójkąta mają długość  $a$  i  $b$ . Kąt zawarty między tymi bokami jest równy  $\gamma$ . Oblicz długość odcinka dwusiecznej kąta  $\gamma$  zawartego w tym trójkącie, jeśli

a)  $a = 8$ ,  $b = 6$ ,  $\gamma = 90^\circ$

b)  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $\gamma = 60^\circ$

**7.81.** Dwa boki trójkąta  $ABC$  mają długości  $|AC| = 4$ ,  $|BC| = 6$ , a kąt  $ACB$  ma miarę  $150^\circ$ . Przez wierzchołek  $C$  poprowadzono prostą prostopadłą do boku  $BC$ , która przecięła bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Oblicz:

a) długość odcinka  $CD$

b) pola trójkątów  $ADC$  i  $CDB$

**7.82.** Dwa boki trójkąta  $ABC$  mają długości  $|AC| = 6$ ,  $|BC| = 12$ , a kąt  $ACB$  ma miarę  $120^\circ$ . Przez punkt  $C$  poprowadzono prostą prostopadłą do boku  $AC$ , która przecięła bok  $AB$  w punkcie  $D$ .

a) Oblicz długość odcinka  $CD$ .

**D b)** Wykaż, że punkt  $D$  jest środkiem boku  $AB$ .

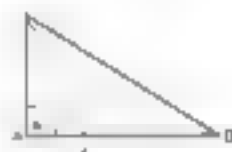
**7.83.** Podstawą trójkąta równoramiennego  $ABC$  jest bok  $AB$ . Środkowe  $AL$  i  $BK$  przecinają się w punkcie  $S$  pod kątem  $60^\circ$  (patrz rysunek obok). Wiadomo, że pole trójkąta  $ABS$  jest równe  $\sqrt{3}$ .



a) Oblicz długości boków trójkąta  $ABC$ .

b) Czy kąt  $ACB$  jest równy  $30^\circ$ ? Odpowiedź uzasadnij.

7.84. Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$ , w którym  $\angle BAC = 90^\circ$  oraz  $|AC| = 12$  cm. Na boku  $AB$  tego trójkąta zaznaczono punkt  $E$  w taki sposób, że  $|CE| = |EB|$ . Wiedząc, że pole trójkąta  $ABC$  jest równe 108 cm<sup>2</sup>, oblicz:



- pole trójkąta  $BCE$ ,
- wysokość trójkąta  $BCE$  poprowadzoną z punktu  $E$ .

7.85. Pole trójkąta  $ABC$  jest równe 30 cm<sup>2</sup>. Wysokość  $AD$  dzieli bok  $BC$  w stosunku  $1:4$  licząc od wierzchołka  $C$ . Wiedząc, że  $AB = 10$  cm, oblicz długości boków  $BC$  i  $AC$ .

7.86. Punkt  $E$  jest punktem przecięcia przekątnych trapezu  $ABCD$  gdzie  $AB \parallel DC$ . Pola trójkątów  $ABE$  i  $CDE$  są odpowiednio równe  $P_1$  i  $P_2$ . Niech  $P$  oznacza pole trapezu  $ABCD$ . Wykaż, że  $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$ .

## Pole trójkąta, cz. 2

7.87. Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 112 m i polu 504 cm<sup>2</sup> wycięto koło styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła.

7.88. Pole trójkąta jest równe 63 cm<sup>2</sup>. Oblicz jego obwód wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm.

7.89. W trójkącie  $ABC$  dane są kąty  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ . Wysokość  $CD$  jest równa 3 cm.

- Oblicz pole trójkąta  $ABC$ .
- Wyznacz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 0,1 cm.

7.90. Pole trójkąta równoramiennego wynosi 48 cm<sup>2</sup>, a sinus kąta przy podstawie jest równy 0,8. Oblicz:

- obwód trójkąta,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.91. Pole trójkąta równoramiennego wynosi 168 cm<sup>2</sup>. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy  $5\frac{1}{4}$  cm. Wiedząc, że ramię jest dłuższe od podstawy o 11 cm:

- Oblicz długości boków tego trójkąta.

7.92. Wykaż, że kąt między ramionami tego trójkąta jest większy od  $30^\circ$  i jednocześnie mniejszy od  $45^\circ$ .

7.93. Pole trójkąta wynosi 84 cm<sup>2</sup>, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 4 cm. Wiedząc, że długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi, wyznacz najkrótszą wysokość tego trójkąta.

7.94. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 16 cm. Wiedząc, że pole tego trójkąta jest równe 120 cm<sup>2</sup>, oblicz:

- długość ramienia,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.95. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 32 cm, a cosinus kąta przy podstawie jest równy 0,8. Oblicz:

- pole tego trójkąta,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.96. W trójkącie dwa boki mają długość 15 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 12,5 cm. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe 108 cm<sup>2</sup>, wyznacz:

- długość podstawy tego trójkąta,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.97. Dwa boki trójkąta mają długość 42 cm i 20 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $2\frac{1}{4}$  cm. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe 336 cm<sup>2</sup>, wyznacz:

- długość trzeciego boku,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.98. Dwa boki trójkąta ostrokątnego mają długość 17 cm i 25 cm, a jego pole jest równe 110 cm<sup>2</sup>. Oblicz:

- sinus kąta między ramionami trójkąta,
- długość trzeciego boku,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

**7 98** Dwa boki trójkąta ostrokątnego mają długość  $5 \pm 3$ , a jego pole jest równe  $6\sqrt{3}$ . Oblicz:

- miarę kąta między tymi bokami,
- długość trzeciego boku,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt

**7 99** Promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest równy 10. Wiedząc, że kąt między ramionami jest równy  $150^\circ$ , oblicz pole tego trójkąta.

**7 100** Promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym jest równy  $5\sqrt{3}$ . Wiedząc, że kąty przy podstawie są równe  $30^\circ$ , oblicz pole tego trójkąta.

**7 101** Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz:

- pole trójkąta,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

**7 102** Boki trójkąta mają długość 25 cm, 39 cm, 56 cm. Oblicz:

- wysokości tego trójkąta,
- sinus najmniejszego kąta,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

**7 103** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawa  $AB$  ma długość 8 cm. W trójkąt ten wpisano okrąg. Punkty  $D$  i  $E$  są punktami styczności okręgu odpowiednio z ramionami  $AC$  i  $BC$  tego trójkąta, przy czym  $|DC| = |CE|$ ,  $|DA| = |AB| = |BE|$ . Oblicz:

- pole trójkąta  $ABC$ ,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**7 104** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 8 cm i 6 cm. Przez wierzchołek kąta prostego poprowadzono prosta, która podzieliła ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Oblicz:

- pola powstałych trójkątów,
- stosunek promieni okręgów wpisanych w te trójkąty.

**7 105** W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

**7 106** Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 17 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt – 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

**7 107** Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego obwód jest równy 70 cm, a pole wynosi  $210 \text{ cm}^2$ .

**7 108** Pole trójkąta prostokątnego jest równe  $180 \text{ cm}^2$ , a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 4 cm. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

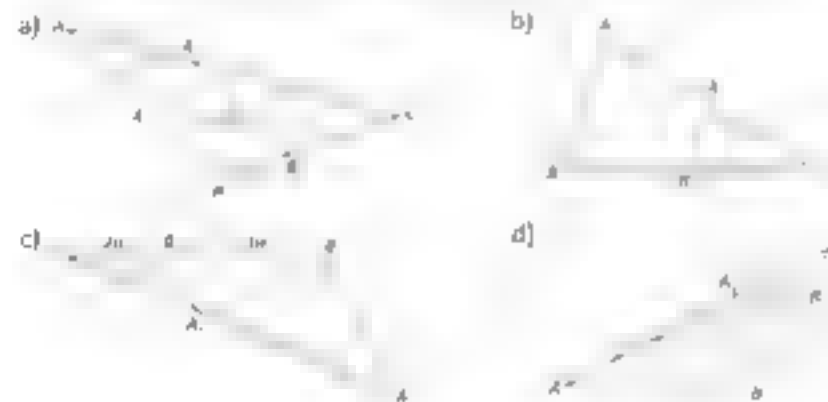
**7 109** W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy, a suma promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt i promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa  $1\sqrt{3}$  cm. Oblicz długość podstawy trójkąta.

## Pola trójkątów podobnych

**7 110** Trójkąt  $ABC$  ma obwód równy 30 cm, a pole  $24 \text{ cm}^2$ . Obwód trójkąta  $A_1B_1C_1$  podobnego do trójkąta  $ABC$  wynosi 15 cm. Oblicz pole trójkąta  $A_1B_1C_1$ .

**7 111** Trójkąt  $ABC$  ma obwód równy 33 cm, a jego pole wynosi  $18 \text{ cm}^2$ . Oblicz obwód trójkąta  $A_1B_1C_1$  podobnego do trójkąta  $ABC$ , wiedząc, że pole trójkąta  $A_1B_1C_1$  jest równe  $2 \text{ cm}^2$ .

**7 112** Odcinek  $A_1B_1$  jest równoległy do odcinka  $AB$ . Na podstawie danych na rysunku oblicz stosunek pola trójkąta  $A_1B_1C_1$  do pola trójkąta  $ABC$ .





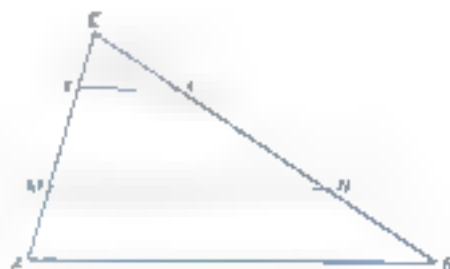
**7.113.** Podstawa  $AB$  trójkąta  $ABC$  ma długość 24 cm. Na boku  $AC$  zaznaczono punkty  $A_1, A_2$  a na boku  $BC$  punkty  $B_1, B_2$  w tak sposób, że  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $A_2B_2 \parallel AB$ . Wiedząc, że  $A_1B_1 = 8$  cm,  $A_2B_2 = 20$  cm, oblicz stosunek pól

- a) trójkątów  $A_1B_1C$ ,  $A_2B_2C$  i  $ABC$       b) wielokątów  $A_1B_1C$ ,  $A_2B_2C$ ,  $A_1A_2B_1B_2$ ,  $A_2B_2A_1$ .

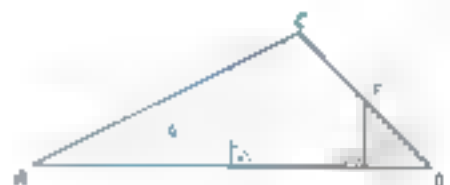
**7.114.** W trójkącie ostrokątnym poprowadzono dwie proste równoległe do podstawy, które podzieliły wysokość trójkąta opuszczoną na tę podstawę na trzy odcinki równej długości. Oblicz stosunek pól powstałych w wyniku tego podziału figur

**7.115.** Stosunek pól dwóch trójkątów podobnych  $ABC$  i  $A'B'C'$  wynosi  $\frac{4}{9}$ . Wiedząc, że podstawa  $A'B'$  trójkąta  $A'B'C'$  jest o 7 cm krótsza od podstawy  $AB$  trójkąta  $ABC$ , oblicz  $|A'B'|$  i  $|AB|$ .

**7.116.** Odcinki  $KL$  i  $MN$  są równoległe do podstawy  $AB$  trójkąta  $ABC$ . Stosunek pól figur  $KLC$ ,  $MNLC$  i  $ABNM$  w podanej kolejności wynosi 1 : 8 : 7. Oblicz  $|KL|$ ,  $|MN|$ ,  $|AB|$ .



**7.117.** W trójkącie  $ABC$  na rysunku obok punkt  $E$  należy do boku  $AC$  oraz  $|EC| : |AE| = 1 : 3$ , natomiast punkt  $F$  jest środkiem odcinka  $BC$ . Proste prostopadłe do podstawy  $AB$  i przechodzące odpowiednio przez punkty  $E$  i  $F$  odcięły dwa trójkąty, których pola są odpowiednio równe 9 i 2. Oblicz pole trójkąta  $ABC$ .



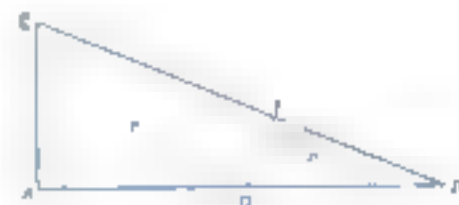
**7.118.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  podstawa  $AB$  ma długość 40 cm. W trójkąt wpisano koło, które jest styczne do ramion trójkąta w punktach  $D$  i  $E$ . Wiedząc, że  $|DE| = 8$  cm, oblicz:

- a) pole trójkąta  $DEC$       b) pole czworokąta  $ABEO$

**7.119.** W trójkąt równoramienny  $ABC$  o bokach długości 13 cm, 13 cm, 10 cm wpisano koło. Styczna do koła równoległa do podstawy odcina od trójkąta  $ABC$  trójkąt  $DEC$ . Oblicz pole trójkąta  $DEC$ .

**7.120.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  przyprostokątne  $AC$  i  $AB$  mają odpowiednio długość 3 cm i 2 cm. Na przyprostokątnej  $AB$  obrano punkt  $D$  takie, że  $\angle ADC = \angle ACB$ . Oblicz pole trójkąta  $ADC$ .

**7.121.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$ ,  $\angle A = 90^\circ$ , przyprostokątne  $AC$  ma długość 12 cm. Odcinek  $DE$  prostopadły do przeciwprostokątnej  $BC$  dzieli trójkąt na dwie figury o polach równych  $P = 6$  cm<sup>2</sup> i  $P = 90$  cm<sup>2</sup>. Oblicz długości boków trójkąta  $DBE$ .



**7.122.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  stosunek przyprostokątnych jest równy  $|AB| : |AC| = 4 : 3$ . Punkt  $D$  dzieli przyprostokątną  $AB$  na odcinki takie, że  $|DB| = 3|AD|$ . Punkt  $E$  należy do przeciwprostokątnej  $BC$  — odcinek  $DE$  jest prostopadły do boku  $BC$ . Oblicz, jakim procentem pola trójkąta  $ABC$  jest pole trójkąta  $DBE$ .

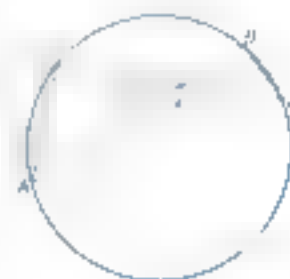
**7.123.** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  stosunek przyprostokątnych jest równy  $|AC| : |AB| = 5 : 12$ . Punkt  $D$  należy do przeciwprostokątnej  $BC$  oraz  $|CD| : |DB| = 5 : 8$ . Punkt  $E$  należy do przyprostokątnej  $AB$  i  $ED \perp CB$ . Oblicz stosunek pola czworokąta  $AEDC$  do pola trójkąta  $EBD$ .

**7.124.** W trójkącie ostrokątnym równobramiennym  $ABC$  ( $|AC| = |BC|$ ) poprowadzono wysokość  $CD$  i  $BE$ . Pole trójkąta  $ABE$  jest o 44% większe od pola trójkąta  $ADC$ . Wiedząc, że obwód trójkąta  $ABC$  jest równy 80 cm, oblicz pole trójkąta  $ABC$ .

**7.125.** Cięciwy  $AB$  i  $CD$  koła przecinają się w punkcie  $E$ . Wiedząc, że  $\angle BED = 30^\circ$ ,  $|AE| = 6$  cm,  $|ED| = 3$  cm oraz  $|EB| = 2$  cm, oblicz pole trójkąta  $AEC$ .

**7.126.** W kole poprowadzono cięciwy  $AB$  i  $CD$ , które przecięły się w punkcie  $E$ . Pole trójkąta  $AEC$  jest o 210 cm<sup>2</sup> większe od pola trójkąta  $EDB$ . Wiedząc, że  $|AE| = 40$  cm,  $|ED| = 16$  cm oraz  $|BE| = 10$  cm, oblicz:

- a) długość odcinka  $CE$ ,  
b) pola trójkątów  $AEC$  i  $EDB$ ,  
c) miarę kąta przecięcia się cięciwy  $AB$  z cięciwą  $CD$ .



**7.127** W trójkąt  $ABC$  wpisano koło, które jest styczne do boków  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $D$  i  $E$ . Wiadomo, że  $AD = EB = 7$  cm oraz  $DE = 10,08$  cm.

- D** a) Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest równoramienny  
b) Oblicz pole trójkąta  $ABC$

**7.128** W ostrokątnym trójkącie równoramiennym  $ABC$  ( $AC = BC$ ) wysokość  $CD$  przecięła się z wysokością  $AE$  w punkcie  $S$ . Wysokość  $AE$  dzieli ramię  $BC$  trójkąta na odcinki  $BE$  i  $EC$ , których długości poróżają w stosunku  $BE : EC = 1 : 2$ .

- a) Oblicz sinus kąta  $EAB$   
c) Wyznacz stosunek pola trójkąta  $ADS$  do pola trójkąta  $SEC$

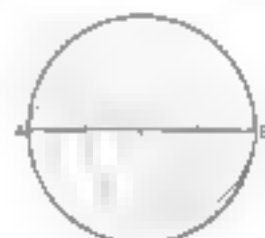
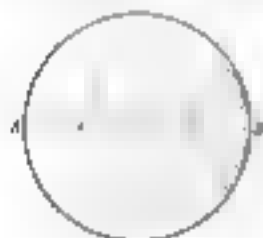
**D 7.129** W trójkąt równoramienny  $ABC$  wpisano okrąg. Następnie poprowadzono dwie proste równoległe do podstawy  $AB$ : prostą styczną do okręgu i prostą  $k$  przechodzącą przez środek okręgu. Te proste podzieliły trójkąt na trzy wielokąty, których pola poróżają w stosunku  $1 : 3 : 5$  licząc od pola trójkąta. Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest równoboczny.

**7.130** Wysokość  $CD$  trójkąta  $ABC$  ma długość 5 cm, dzieli bok  $AB$  na dwa odcinki:  $AD = 4$  cm,  $DB = 9$  cm. Poprowadzono prostą  $EF$  równoległą do  $CD$ , która przecięła boki  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $E$  i  $F$ . Wiedząc, że odcinek  $EF$  dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach, oblicz jego długość.

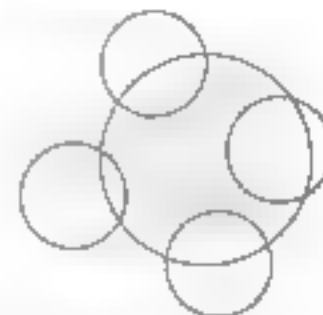
## Pole koła, pole wycinka koła

**7.131** Średnicę  $AB$  koła podzielono na cztery równe odcinki. Oblicz, jaką część pola tego koła stanowi figura zaznaczona kolorem niebieskim, jeśli:

- a) okręgi wyznaczone są styczne wewnętrzne trzech średnic, które są zawarte w średnicy  $AB$   
b) łuk wewnętrzny koła jest sumą dwóch półokręgów (patrz rysunek poniżej)



**D 7.132.** Każde z czterech mniejszych kół ma promień 1. Większe koło ma promień 2. Wykaż, że pole figury niebieskiej jest równe polu figury szarej.



**7.133** Promień koła jest równy  $r$ . Kąt wycinka tego koła ma miarę  $\alpha$ . Oblicz pole wycinka, jeśli:

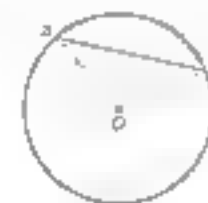
- a)  $r = 9$  cm,  $\alpha = 20^\circ$   
b)  $r = 12$  cm,  $\alpha = 150^\circ$   
c)  $r = 5$  cm,  $\alpha = 54^\circ$

**7.134.** Pole wycinka koła jest równe  $P$ , a łuk tego wycinka ma długość  $L$ . Oblicz promień koła, jeśli:

- a)  $P = 10\pi$  cm<sup>2</sup>,  $L = 2,5\pi$  cm  
b)  $P = 30$  cm<sup>2</sup>,  $L = 12$  cm  
c)  $P = 210\pi$  cm<sup>2</sup>,  $L = 14\pi$  cm

**7.135.** Dane jest koło o środku w punkcie  $O$  i promieniu  $r$ . Oblicz pole odcinka tego koła (zaznaczonego na rysunku obok), wyznaczonego przez łuk długości  $L$ , jeśli:

- a)  $r = 2$ ,  $L = \pi$   
b)  $r = 3$ ,  $L = 2\pi$   
c)  $r = 6$ ,  $L = 5\pi$



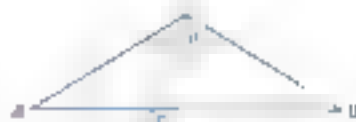
**7.136.** Stosunek pola trójkąta do pola koła wpisanego w ten trójkąt jest równy  $6 : \pi$ . Wiedząc, że średnica tego koła ma długość 6 cm, oblicz obwód trójkąta.

**7.137** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie.

**7.138** Kąt wpisany w koło ma miarę  $45^\circ$  i jest oparty na łuku długości 3 cm. Oblicz pole wycinka koła, wyznaczonego przez ten sam łuk.



- D 7.151.** Punkt  $D$  należy do podstawy  $AB$  trójkąta równoramiennego  $ABC$ . Poprząda  $CD$  dzieli kąt przy wierzchołku  $C$  na kąty  $\alpha$  i  $\beta$ , jak na rysunku obok. Wykaż, że  $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .

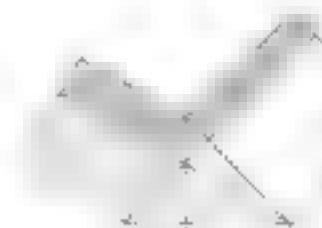


- D 7.152.** Punkt  $M$  jest dowolnym punktem wewnątrz trójkąta. Niech  $x, y, z$  oznaczać odległości punktu  $M$  odpowiednio od boków  $a, b, c$  tego trójkąta, natomiast  $h_a, h_b, h_c$  – wysokości poprowadzone na te boki. Wykaż, że

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$$

- D 7.153.** Wykaż, że jeśli wysokości trójkąta o bokach długości  $a, b, c$  są odpowiednio równe  $\frac{a}{9}, \frac{b}{10}, \frac{c}{14}$ , to ten trójkąt jest prostokątny.

- D 7.154.** Na bokach trójkąta ostrokatnego zbudowano kwadraty, następnie poprowadzono proste zawierające wysokości tego trójkąta. Te proste podzieliły kwadraty na sześć prostokątów (zobacz rysunek obok). Wykaż, że prostokąty w tym samym kolorze mają równe pola.



- D 7.155.** W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości  $a, b$  wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki  $x, y$ . Wykaż, że  $ab = 2xy$ .

- D 7.156.** Wykaż, że jeśli suma wysokości trójkąta jest 9 razy większa od długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to ten trójkąt jest równoboczny.

## Test sprawdzający do rozdziału 7

1. Trójkąt prostokątny równoramienny ma pole równe  $2 \text{ cm}^2$ . Z tego wynika, że przyprostokątna ma długość:

A.  $\sqrt{2} \text{ cm}$       B.  $2 \text{ cm}$       C.  $2\sqrt{2} \text{ cm}$       D.  $4 \text{ cm}$

2. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości  $7 \text{ cm}$  i  $24 \text{ cm}$ . Niech  $h$  oznacza odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej tego trójkąta. Wówczas:

A.  $h = 3\frac{9}{25} \text{ cm}$       B.  $h = 12,5 \text{ cm}$       C.  $h = 6,72 \text{ cm}$       D.  $h = 5\frac{23}{25} \text{ cm}$

3. Pole jednej kratki wynosi 1. Pole figury na rysunku obok jest równe:

A. 8      B. 8,5  
C. 9      D. 9,5



4. Trójkąt  $A_1B_1C_1$  o polu  $36 \text{ cm}^2$  jest podobny do trójkąta  $ABC$  o polu  $4 \text{ cm}^2$ . Skala podobieństwa trójkąta  $A_1B_1C_1$  do trójkąta  $ABC$  jest równa:

A. 3      B. 9      C. 12      D.  $\frac{1}{9}$

5. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona na przeciwprostokątną dzieli ją na dwa odcinki, długości  $2 \text{ cm}$  i  $8 \text{ cm}$ . Pole tego trójkąta jest równe:

A.  $16 \text{ cm}^2$       B.  $20 \text{ cm}^2$       C.  $24 \text{ cm}^2$       D.  $28 \text{ cm}^2$

6. Na boku  $AC$  trójkąta  $ABC$  zaznaczono punkty  $D, E$  w taki sposób, że  $AD = ED = EC$ . Przez punkty  $E, D$  poprowadzono proste równoległe do boku  $AB$ , które podzieliły trójkąt na trzy rozłączne figury o polach równych odpowiednio  $P_1, P_2, P_3$  (zobacz rysunek obok). Zatem:

A.  $P_1 = P_2 = 1,2$       B.  $P_1 = P_2 = 2,3$   
C.  $P_1 = P_2 = 4,9$       D.  $P_1 = P_2 = 3,5$



7. Odcinek  $CD$  jest środkową w trójkącie  $ABC$ . Trójkąt  $DAC$  ma pole równe  $3 \text{ cm}^2$ . Pole trójkąta  $ABC$  wynosi:

A.  $4,5 \text{ cm}^2$       B.  $5 \text{ cm}^2$       C.  $6 \text{ cm}^2$       D.  $7,5 \text{ cm}^2$

8. Boki trójkąta mają długość 3, 4, 5. Pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe

- A.  $5\pi$       B.  $6,25\pi$       C.  $10\pi$       D.  $25\pi$

9. Boki trójkąta mają długość 13, 14, 15. Pole tego trójkąta jest równe

- A. 105      B. 91      C. 84      D. 42

10. W trójkącie dwa boki mają długości 8 cm i 5 cm, a kąt między tymi bokami jest równy  $150^\circ$ . Pole tego trójkąta jest równe

- A.  $20 \text{ cm}^2$       B.  $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$       C.  $10\sqrt{2} \text{ cm}^2$       D.  $10 \text{ cm}^2$

11. Na rysunku obok punkty A i B są środkami dwóch sąsiednich boków kwadratu. Jaką część pola kwadratu stanowi pole trójkąta ABC?

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{3}{8}$       D.  $\frac{2}{5}$



12. Pole trójkąta wynosi  $48 \text{ cm}^2$ . Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm. Obwód tego trójkąta jest równy

- A. 16 cm      B. 32 cm      C. 72 cm      D. 144 cm

13. Na rysunku obok dany jest wycinek koła, którego kąt jest równy  $45^\circ$ . Jeśli łuk tego wycinka ma długość  $x$ , to pole koła jest równe

- A.  $\pi$       B.  $4\pi$   
C.  $8\pi$       D.  $16\pi$



14. Pole wycinka koła o promieniu 12 cm jest równe  $60\pi \text{ cm}^2$ . Kąt środkowy wyznaczający dany wycinek koła jest równy

- A.  $150^\circ$       B.  $135^\circ$       C.  $120^\circ$       D.  $90^\circ$

15. Dany są dwa okręgi współśrodkowe. Cięciwa AB większego okręgu ma długość 10 cm i jest styczna do mniejszego okręgu. Pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te okręgi jest równe

- A.  $25\pi \text{ cm}^2$       B.  $100\pi \text{ cm}^2$   
C.  $50\pi \text{ cm}^2$       D.  $75\pi \text{ cm}^2$



## Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7

16. Boki trójkąta mają długość  $a = \sqrt{8}$ ,  $b = \sqrt{12}$ ,  $c = \sqrt{6}$ . Oblicz miary kątów tego trójkąta

17. Boki trójkąta mają długość  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , kąty są odpowiednio równe  $\alpha$ ,  $\beta$ .  $R$  jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli

- a)  $a = \sqrt{6}$ ,  $b = 2$ ,  $\beta = 45^\circ$       b)  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{2}$ ,  $\alpha = 45^\circ$   
c)  $R = c = 5$ ,  $\alpha = 60^\circ$       d)  $R = 3$ ,  $a = \sqrt{27}$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $c < b$ .

18. Oblicz długość boków trójkąta równoramiennego, którego pole jest równe  $25\sqrt{2}$ , a kąt między ramionami jest równy  $45^\circ$

19. W trójkącie ABC bok BC ma długość 16 cm oraz  $\angle ACB = 120^\circ$ . Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 16 cm, wyznacz

- a) pozostałe kąty trójkąta ABC  
b) wysokość poprowadzoną z wierzchołka C,  
c) długość środkowej AD

20. W trójkącie prostokątnym cosinus jednego z kątów ostrych jest równy  $\frac{3}{5}$ . Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 12,5 cm. Oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej

21. Pole trójkąta prostokątnego wynosi  $240 \text{ cm}^2$ , a tangens jednego z kątów ostrych jest równy  $\frac{7}{8}$ . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt

22. Boki trójkąta mają długość 13 cm, 20 cm, 21 cm. Oblicz  
a) pole tego trójkąta,  
b) sinus największego kąta,  
c) promień okręgu wpisanego w trójkąt,  
d) promień okręgu opisanego na trójkącie.

23. Dwa boki trójkąta mają długość  $a = 5$ , a kąt między tymi bokami jest równy  $\alpha = 60^\circ$ . Oblicz

- a) długość trzeciego boku trójkąta  
b) wysokość poprowadzoną na trzeci bok,  
c) długość odcinka dwusiecznej kąta  $\alpha$  zawy tego w tym trójkącie  
d) długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta  $\alpha$ .



24. Dwa boki trójkąta mają długość 28 cm i 25 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy  $14\frac{1}{2}$  cm. Wiedząc, że pole trójkąta wynosi 240 cm<sup>2</sup>, wyznacz

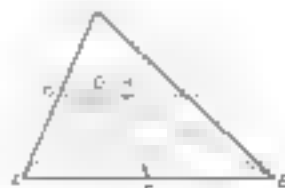
- długość trzeciego boku,
- promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

25. Dwa boki trójkąta mają długość  $a = 7$  cm,  $b = 8$  cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 1,5 cm. Wiedząc, że pole trójkąta wynosi  $14\frac{1}{2}$  cm<sup>2</sup>, oblicz

- długość trzeciego boku,
- sinusy kątów tego trójkąta.

D 26. Punkty D, E, F są środkami boków trójkąta ABC. Punkty G, H należą do odcinka DE. Wykaż, że:

- pola trójkątów AFG, FBH oraz DEC są równe,
- suma pól trójkątów niebieskich jest równa polu jednego białego trójkąta.



D 27. W danym trójkącie poprowadzono dwie proste jednego kąta. Wykaż, że jeśli pola powstałych dwóch trójkątów są równe, to dany trójkąt jest równoramienny.

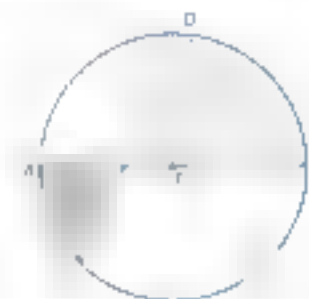
28. W trójkącie ABC dane są  $|AC| = 20$ ,  $|BC| = 15$ ,  $\angle C = 30^\circ$ . Punkt D należy do boku BC oraz pole trójkąta ADE jest dwa razy większe od pola trójkąta ABD. Oblicz  $|AD|$ .

29. W trójkącie ABC w którym  $|AC| = 3$  cm,  $|BC| = 4$  cm dwusieczna z wierzchołka C przecina bok AB w punkcie D. Wiedząc, że pole trójkąta ADC jest o 6 cm<sup>2</sup> większe od pola trójkąta DBC, oblicz pole trójkąta ABC.

30. W trapezie ABCD oktorokach AB i DC proste przecinają się w punkcie E. Wiedząc, że pola trójkątów ABE i CDE są odpowiednio równe 90 cm<sup>2</sup> i 40 cm<sup>2</sup>, oblicz pole trójkąta AED.

31. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego ABC porządkują w stosunku  $|AC| : |AB| = 3 : 4$ . Symetralna przeciwprostokątnej BC przecina bok BC w punkcie D, bok AB w punkcie E. Jaka część pola trójkąta ABC stanowi pole trójkąta EBD?

32. Pole koła jest równe  $72\frac{1}{4}\pi$  cm<sup>2</sup>. Cięciwa CD przecina średnicę AB w punkcie E, odległym o 5 cm od środka koła. Wiedząc, że pole trójkąta EBD jest 9 razy większe od pola trójkąta AEF, oblicz odległość cięciwy CD od środka koła.

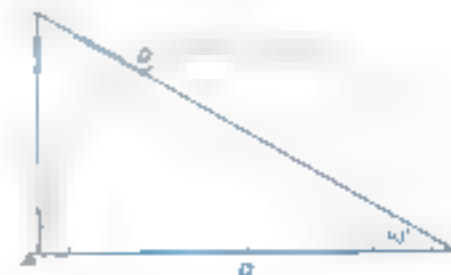


33. Pole wycinka koła jest równe 40 cm<sup>2</sup>, a łuk tego wycinka ma długość 10π cm. Oblicz:

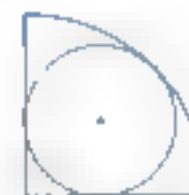
- promień koła,
- miarę kąta środkowego tego wycinka.

34. W trójkącie prostokątnym ABC dane są  $|AC| = 3$  cm,  $\angle CAB = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ . Przyprostokątna AB jest średnicą półkola, jak na rysunku obok. Punkt D jest punktem przecięcia półokręgu z bokiem BC. Oblicz:

- długość cięciwy DB,
- pole odcinka koła, zaznaczonego na rysunku obok.



D 35. W ćwiartkę koła o promieniu  $R = 2$  wpisano koło, którego promień jest równy  $r$ . Wykaż, że  $r = \sqrt{2} - 1$ .



36. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 26 cm. Wysokość AE jest równa 24 cm. Oblicz:

- obwód trójkąta ABC,
- długości odcinków na jakie wysokość AE dzieli podstawę AB,
- stosunek pola trójkąta ACF do pola trójkąta CEF, gdzie F jest punktem wspólnym wysokości AE i CO.

D 37. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokości AE i BF, które przecięły się w punkcie M. Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABM.

**D 38** W trójkącie  $ABC$  kąt  $ACB$  jest równy  $120^\circ$  oraz  $AC = 2 \cdot BC$ . Dwusieczna kąta  $ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Wykaz, że stosunek promienia okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  do promienia okręgu opisanego na trójkącie  $DBC$  jest równy  $3 : 1$ .

**D 39** W trójkącie prostokątnym  $ABC$  w którym  $\angle C = 90^\circ$  poprowadzono odcinek  $CD$  w taki sposób, że  $D \in AB$  oraz  $\angle ACD = 2 \cdot \angle BCD$ . Wykaz, że jeżeli pola trójkątów  $ADC$  i  $BCD$  są równe to kąty ostre trójkąta  $ABC$  mają miarę  $30^\circ$  i  $60^\circ$ .

**D 40** W trójkącie prostokątnym  $ABC$   $\angle BCA = 90^\circ$  cosinus kąta  $CAB$  wynosi  $0,8$ . Punkt  $D$  jest punktem styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt z przeciwprostokątną  $AB$ . Wykaz, że stosunek pól trójkątów  $ADC$  i  $DBC$  jest równy  $3 : 2$ .

## 8. Wielomiany

### Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej

**8.1** Wśród podanych wyrażeń algebraicznych znajdują się wielomiany. Wykaz je:

- |                    |                    |                         |
|--------------------|--------------------|-------------------------|
| a) $3x^2 - 2x - 4$ | b) $-12x$          | c) $\frac{3}{x^2 + 1}$  |
| d) $\sqrt{x} + 8$  | e) $5 \cdot x$     | f) $2 x  + 3$           |
| g) $\sqrt{2}$      | h) $3x^2 - 2x + 1$ | i) $\frac{2x^2 + 8}{4}$ |

**8.2.** Dany jest jednomian  $F(x)$ . Określ jego stopień.

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| a) $F(x) = 5 \cdot x^4$           | b) $F(x) = 0,2 \cdot x^3 - x$                    |
| c) $F(x) = 8 \cdot (x^5 - x^3)^8$ | d) $F(x) = -0,3 \cdot (x^2)^5 \cdot (x^4 - x^2)$ |

**8.3.** Dany jest jednomian stopnia  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Oblicz  $n$ , jeśli:

- $G(x) = 0,5x^n$  oraz  $G(4) = 32$
- $G(x) = \frac{1}{3}x^n$  oraz  $G(3) = 243$
- $G(x) = \sqrt{5}x^n$  oraz  $G(\sqrt{5}) = 325$
- $G(x) = \sqrt{2}x^n$  oraz  $G(2\sqrt{2}) = 32$

**8.4** Porządkuj dany wielomian rosnąco. Następnie podaj stopień tego wielomianu oraz wypisz jego współczynniki.

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| a) $F(x) = 2 - 4x - 8x^4 - 3x - 9$ | b) $G(x) = x - 3x^3 + 5x + 3x^2 + 2x^4$ |
| c) $H(x) = x - 2x - 4 - 3x - 1$    | d) $W(x) = 3x - 9x - x - 3x - 9x^4$     |

**8.5.** Porządkuj dany wielomian malejąco. Następnie podaj stopień tego wielomianu oraz wypisz jego współczynniki.

- |  |  |
|--|--|
| a) $F(x) = 4x - 3 + 5x^2 - 5x^4 - 11x$ | b) $G(x) = 9x^2 + 8 - 7x - 9x^3 + 7x$  |
| c) $H(x) = 2 - 3x^3 + 2x^2 + 4x^4$     | d) $W(x) = -4x + 6 + 2x - 8x^3 + 4x^3$ |

**8.6.** Podaj przykład wielomianu jednej zmiennej rzeczywistej  $x$ :

- a) stopnia siódmego, który jest uporządkowany rosnąco, ma tylko trzy wyrazy różne od zera,  
b) stopnia dziewiątego, który jest uporządkowany malejąco, ma tylko pięć wyrazów różnych od zera

**8.7.** Dany jest wielomian  $W(x)$ . Oblicz jego wartość dla podanych obok wielomianu liczb

a)  $W(x) = x^2 + 4x - 7$        $x = 3, 4, 5$

b)  $W(x) = x^2 + 1$        $x = 2, 1, 3, 2$

**8.8.** Podaj przykład wielomianu  $W(x)$  zmiennej rzeczywistej  $x$ :

- a) stopnia piątego, który ma tylko trzy wyrazy różne od zera oraz dla  $x = 1$  przyjmuje wartość 6,  
b) stopnia czwartego, który dla  $x = -\sqrt{2}$  przyjmuje wartość 11.

**8.9.** Wyznacz sumę wszystkich współczynników wielomianu  $W(x)$ , jeśli:

a)  $W(x) = 8x^3 - 2x^2 + 4x^3 - 10$

b)  $W(x) = 12x^2 + 6x + 4x + 1$

c)  $W(x) = (3x^{10} - 2x^{10})^{10}$

d)  $W(x) = 1 - 4x + 2x^2$

**8.10.** Wyznacz współczynnik  $a$  wielomianu  $W(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + 3$ , jeśli  $W(-2) = 1$ .

**8.11.** Wyznacz współczynnik  $a$  i  $b$  wielomianu  $W(x) = 5x^3 + ax^2 + b$  wiedząc, że  $W(1) = 2$  oraz  $W(2) = -31$ .

**8.12.** Wyznacz współczynniki  $a$  i  $b$  wielomianu  $W(x) = 2x^4 + ax^3 + x^2 + b$  wiedząc, że  $W(1) = 5$  oraz  $W(-1) = 1$ .

**8.13.** Jednym ze współczynników wielomianu  $W(x) = ax^3 + bx^2 + x$  jest wyznaczony przez warunek  $W(1) = W(-1) = 8$ . Podaj wartość tego współczynnika.

**8.14.** Wyznacz współczynnik  $a$  wielomianu  $W(x) = x^3 + ax^2 + 4$  wiedząc, że  $W(\sqrt{2}) = 1$  i  $W(-\sqrt{2}) = 2$ .

**8.15.** Suma wszystkich współczynników wielomianu

$W(x) = 3x^3 + (2a - b)x^2 + (a + b)x + 6$  jest równa 8 oraz  $W(2) = 32$ . Oblicz  $a$  i  $b$ .

**8.16.** Suma wszystkich współczynników wielomianu

$W(x) = 5x^3 + (2a^2 - 3)x^2 + (a + 1)x + 2$  jest równa 11. Oblicz  $a$ .

**8.17.** Suma wszystkich współczynników wielomianu

$W(x) = 2x^4 + a - a|x| - b - 4$  jest równa 6 oraz  $W(0) = 8$ . Oblicz  $a$  i  $b$ .

**8.18.** Wyznacz współczynniki wielomianu  $W(x)$ , jeśli:

a)  $W(x) = -3x^3 + (a + 3b)x^2 + cx - d$  oraz  $W(1) = 4$ ,  $W(-1) = 2$ ,  $W(2) = 11$

b)  $W(x) = 2x^4 + (a^2 + 5)x^3 + (6a - b)x^2 - 12$  oraz  $W(1) = 8$ ,  $W(-1) = -15$ .

**8.19.** Dany jest wielomian  $W(x)$  z parametrem  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Określ stopień tego wielomianu ze względu na wartość  $m$ .

a)  $W(x) = (m^2 - 1)x^4 + (m + 1)x^3 - (m - 2m - 3)x^2 - m - 3$

b)  $W(x) = (m^2 + 4m - 21)x^4 + (2m - 6)x^3 + (m + 7)x^2 + 3x + 1$

**8.20.** Dany jest wielomian  $W(x) = 2x^3 + (a + b)x^2 - 3ax - b + 2$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Wykaż, że liczba  $W(3)$  jest podzielna przez 8.

**8.21.** Wykaż, że jeśli  $W(x) = ax^3 + 11x^2 + (a - 1)x - a + 25$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$  i  $x \in \mathbb{R}$  to liczba  $W(a)$  jest nieujemna.

**8.22.** Wielomian  $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  gdzie  $a \neq 0$  dla liczby 5 przyjmuje wartość 312, zaś dla liczby 1 przyjmuje wartość 12. Wykaż, że co najmniej, jeden z jego współczynników nie jest liczbą całkowitą.

## Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów

**8.23.** Dane są wielomiany  $W(x)$  i  $P(x)$ . Wyznacz wielomian  $W(x) + P(x)$ :

a)  $W(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 6$

$P(x) = 4x^3 - 3x + 2x^2 - 4x - 8$

b)  $W(x) = 3x^5 - 8x^4 + 2x^3 - x$

$P(x) = 9x^5 + 9x^4 - 6x^3 + 1$

c)  $W(x) = 3 - 4x^2 + 8x^3 + x^4$

$P(x) = -x^4 - 8x^3 + 2x$

d)  $W(x) = \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{2}x^5 + 6x - \frac{1}{8}$

$P(x) = 0,25x^8 + 0,5x^5 - 8x^4 + 0,125$

8.24. Dane są wielomiany  $W(x) = P(x)$ . Wyznacz wielomian  $W(x) - P(x)$ .

a)  $W(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x - 8$       $P(x) = 0,75x^3 + \frac{5}{8}x^2 + 0,125x^2 + 2$

b)  $W(x) = 4x^2 - 12x^2 + 0,6x + 0,4$       $P(x) = -4x^2 - 12x^2 + 0,5x + 0,4$

c)  $W(x) = 3x^3 - \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x^2 + 8x$       $P(x) = 5x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 4x - 1$

d)  $W(x) = \sqrt{3}x^4 - 3\sqrt{3}x^2 + 4x^2 + 1$       $P(x) = x^4 - x^2 + \sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}$

8.25. Wykonaj działania.

a)  $(2x^4 - 3x^4 + 2x) - (x^4 + 8x^2 + 4x - 1) + x^4 + 5x^4 + 6x^2$

b)  $(-3x^4 + 5x^3 - 6) - (4x^4 + 2x^2 + 4x) - (-7x^4 + 3x^2 + 8)$

c)  $7x^3 - 6x^2 + 2x - (4x^3 + 3x^2 - 6) - (7x^3 - 10x^3)$

d)  $12x^2 - (x^2 + 4x^4) - (14x^3 - 5x^7)$

8.26. Dany jest wielomian  $W(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1$ . Wyznacz wielomian  $F(x)$  i uporządkuj go malejąco, jeśli:

a)  $F(x) = 4 \cdot W(x)$      b)  $F(x) = -0,5 \cdot W(x)$      c)  $F(x) = x^2 \cdot W(x)$

d)  $F(x) = (x - 1) \cdot W(x)$      e)  $F(x) = (x - 3x) \cdot W(x)$      f)  $F(x) = 2x^4 - 3 \cdot W(x)$

8.27. Dane są wielomiany:  $W(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 1$ ,  $P(x) = 2x^2 + 3x$  oraz  $G(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7$ . Wykonaj działania:

a)  $P(x) + 2G(x)$      b)  $3P(x) - 2W(x)$

c)  $W(x) - [P(x) - G(x)]$      d)  $W(x) + G(x) - 3P(x)$

8.28. Dane są wielomiany:  $W(x) = 3x^2 - 2$ ,  $P(x) = x^3 + 2x - 1$  oraz  $G(x) = 4x^3 - 3x + 1$ . Wykonaj działania:

a)  $W(x) - P(x)$      b)  $P(x) - G(x)$

c)  $[W(x)]^2 - G(x)$      d)  $[P(x)]^2 - W(x)$

8.29. Wykonaj mnożenie

a)  $(x^3 - x^2)(x^3 - x^2)$      b)  $(x^{12} - 1)(x^3 + x^4)$

c)  $(x^7 - x^6 - 1)(x^5 + x^3)$      d)  $(x^3 - x^2 - x^2)(x^3 + 1)$

8.30. Wykonaj działania

a)  $(3x^2 - 4x)(3x^2 + 4x)$      b)  $(5x^2 - 6x)^2$

c)  $(3x^2 + 2x)^3$      d)  $(9x^2 - x^2)(9x^2 + x^2)$

8.31. Wykaż, że  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ . Następnie wykonaj działania

a)  $(x^2 - x + 1)^2 - (x^2 + x + 1)^2$      b)  $(3x^2 - x + 2)^2 - (3x^2 + x + 2)^2$

c)  $(x^2 + x)^2 + (3x^2 + 1)^2$      d)  $(2x^2 - 3x)^2 + (x^2 + 4x)^2$

8.32. Wykonaj działania

a)  $(x^3 - 2x + 1)(x^2 + 1) + (x^4 + 3x + 2)(x^3 - 2x)$

b)  $(2x^4 - 3x + 5)(x^2 + 4x + 1) + (x^5 + 2x)(x^4 - 4x^2)$

c)  $(3x^3 - 2x^2 + 5x + 1)(x + 2) + (x^3 + 4x^2 - 1)(x^2 + 5x)$

d)  $(x^5 - 2x^2 + 4x + 5)(x^2 - 1) - (x^3 - 4x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x)$

8.33. Określ stopień wielomianu  $W(x)$  oraz podaj wyraz wolny i współczynnik tego wielomianu przy najwyższej potęgce zmiennej  $x$  bez wykonywania działań

a)  $W(x) = (-3x^2 + 1)(2x^2 - 5)^3$      b)  $W(x) = (4x^2 - 1)(3x^2 + 2)(x^3 - 4)$

c)  $W(x) = (3x + 1)^4(2x^2 - 5)$      d)  $W(x) = -2x^6(x^3 + 1)^4(2 - 3x)^2$

8.34. Wykonaj mnożenie wielomianów sposobem pisemnym:

a)  $(3x^4 - 2x^3 + x + 2)(-2x^3 + x^2 - 3x^2 + 2x^2 + 3x + 1)$

b)  $(-2x^3 + x^2 - 3x^2 + x + 4)(-3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 3)$

c)  $(x^4 - 2x^3 + 2x - 6x + 1 - 5x^3 + 2x - 3x - 4)$

d)  $(-2x^7 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 5)(-3x^6 + 5x^5 - 3x^3 + 2)$

8.35. Podaj przykład dwóch wielomianów zmiennej rzeczywistej  $x$ , których iloczyn jest wielomianem stopnia siódmego, przyjmującym dla liczby 2 wartość 26, a jego wyraz wolny jest równy 15.

8.36. Podaj przykład dwóch wielomianów stopnia czwartego zmiennej rzeczywistej  $x$ , których iloczyn jest wielomianem przyjmującym dla liczby 1 wartość 14, a jego współczynnik przy najwyższej potęgce zmiennej jest równy 5.

## Równość wielomianów

8.37. Sprawdź, czy wielomiany  $W(x) = P(x)$  są równe, jeśli:

a)  $W(x) = 3x^4 - 1,4 - 2x(x + 1)$       $P(x) = 6x^4 - 8x + 10x - 4$

b)  $W(x) = (3 - 5x)^2(x^2 - 1) - 25x^4$       $P(x) = 30x^3 - 16x^2 + 30x - 9$

c)  $W(x) = (2x - 1)^3$       $P(x) = 8x^3 + 12x - 12x + 1$

d)  $W(x) = 3x^4 - (2x^4 - 1)(x^3 - 1)$       $P(x) = x^4 - x + 2x - 1$

8.38. Sprawdź, czy istnieje liczba  $a$  dla której wielomiany  $W(x) + P(x)$  są równe, jeśli:

- a)  $W(x) = (x^2 - ax)(x + 2a) + 8x$        $P(x) = x^2 - 2x$   
 b)  $W(x) = 2x^2 - 3(a + 1)x^2 + 4a$        $P(x) = 2x^2 - 6x^2 + 8$   
 c)  $W(x) = (x^3 - 2a)(x^2 + 3a) - 6x$        $P(x) = x^3 + 3ax + 16$   
 d)  $W(x) = (3x - a)^2 - 4x$        $P(x) = 36x^2 + 48x^2 + 16x$

8.39. Wyznacz liczbę  $a$  dla której wielomiany  $W(x) + P(x)$  są równe, jeśli:

- a)  $W(x) = (3a - a^2)x + 2a$        $P(x) = 3x^2 + 18x^2 - 3x - 17$   
 b)  $W(x) = 8 + ax(ax + 1)$        $P(x) = 5x + 3x - 2x + 8$   
 c)  $W(x) = 6x - 5a - ax - 2$        $P(x) = (3x^2 - a^2x + 2)(-2x - 1)$   
 d)  $W(x) = (2x - 3)(2x - a) - 4$        $P(x) = 4x^2 + (a + 3)x^2 - 6x - 8$

8.40. Sprawdź, czy istnieją liczby  $a$  i  $b$  dla których wielomiany  $W(x) + P(x)$  są równe, jeśli:

- a)  $W(x) = 2x^2 + (3a + 1)x^2 + (b + 2)x - 4$        $P(x) = 2x^2 + 4x^2 + 5x - 4$   
 b)  $W(x) = (2ax - b)^2$        $P(x) = 8x^2 - 10x^2 + 6x - 1$   
 c)  $W(x) = 2ax(2x - b)^2$        $P(x) = 16x^3 - 48x^2 + 36x$   
 d)  $W(x) = (x^2 - ax)^2 - (x^2 + bx)^2$        $P(x) = 2x^3 - 3x$

8.41. Wyznacz współczynniki  $a$  i  $b$  dla których wielomiany  $W(x) + F(x) + H(x)$  są równe, jeśli:

- a)  $W(x) = x^2 - ax - 3a + 1$        $F(x) = 2x^2 - bx - 4$        $H(x) = x^2 - 7x - 8x + 5$   
 b)  $W(x) = 2x^2 + ax^2 + 5x - 3$        $F(x) = x^3 - 5x^2 + bx + 4$        $H(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 7$

8.42. Wyznacz współczynniki  $a$  i  $b$  tak, aby  $W(x) + F(x) = H(x)$ , jeśli:

- a)  $W(x) = x^2 + 5x + 2$        $F(x) = ax - b$        $H(x) = 2x^2 - 3x - 5x - 6$   
 b)  $W(x) = 2x^2 - x - 5$        $F(x) = ax - b$        $H(x) = 2x^2 + 7x - 8x + 15$

8.43. Wyznacz współczynniki  $a$  i  $b$  tak, aby wielomian  $W(x) + F(x) + H(x)$  był wielomianem zerowym, jeśli:

- a)  $W(x) = 3x + 5$        $F(x) = x^2 + bx - 1$        $H(x) = -3x^2 - x^2 - 2x + 20$   
 b)  $W(x) = 2x - 3$        $F(x) = x^2 + bx - 1$        $H(x) = 2x^2 + 7x^2 - 13x - 3$

8.44. Dane są wielomiany  $W(x) = (2x + b)(x + 3x - 4)$        $F(x) = (ax + 3)(x + 1)$  oraz  $H(x) = x^2 - 6x + 10x + 2$ . Wyznacz wartości parametrów  $a$  i  $b$  dla których  $W(x) + F(x) = H(x)$  dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ .

8.45. Dane są wielomiany  $W(x) = (ax - 2)(x - 2)$        $F(x) = (2x - b)(x + 3)$  oraz  $H(x) = 5x^2 - 11x + 10x - 5$ . Dla jakich wartości parametrów  $a$  i  $b$  wielomian  $W(x) + F(x) - H(x)$  jest wielomianem zerowym?

8.46. Wyznacz współczynniki  $a$  i  $b$  dla których wielomiany  $W(x) + F(x)$  są równe, jeśli:

- a)  $W(x) = x^2 + mx^2 + nx^2 + 18x + 9$        $F(x) = (x^2 + ax + b)^2$   
 b)  $W(x) = x^2 + 4x^2 + mx^2 + 12x + n$        $F(x) = (x^2 + ax + b)^2$   
 c)  $W(x) = x^2 + mx^2 + 5x^2 + nx + 4$        $F(x) = (x^2 + ax + b)^2$   
 d)  $W(x) = x^2 + mx^2 + 6x^2 + nx + 3$        $F(x) = (x^2 + ax + b)^2$

## Wzory skróconego mnożenia stopnia 3 Wzór na $a^3 - b^3$

8.47. Zapisz za pomocą sumy algebraicznej wyrażenie:

- a)  $(y + z)^2$       b)  $(2 + a)^2$       c)  $(1 + 3x)^2$       d)  $(\sqrt[3]{3} + 1)^2$   
 e)  $(5 - b)^2$       f)  $(x - 4)^2$       g)  $(2x - 3)^2$       h)  $(3 - \sqrt{2})^2$

8.48. Oblicz sześciątą danej liczby

- a)  $1 - \sqrt{3}$       b)  $\sqrt{6} + 2$       c)  $3\sqrt{2} - 1$       d)  $4\sqrt{2} - \sqrt{6}$   
 e)  $2 + \sqrt{2}$       f)  $-\sqrt{3} - \sqrt{9}$       g)  $2\sqrt{2} - \sqrt{4}$       h)  $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{25}$

8.49. Zapisz za pomocą sumy algebraicznej wyrażenie

- a)  $x^2 - a^2 - x^2 - ax - a$       b)  $3 - x(9 - 3x - x^2)$   
 c)  $(y + 4)(16 - 4y + y^2)$       d)  $(2 - y)(4 + 2y + y^2)$   
 e)  $(25 + 5x + x^2)(x - 5)$       f)  $(\sqrt{2} - 1)(x^2 + 2 + \sqrt{2}x)$

8.50. Oblicz

- a)  $2 - \sqrt{9} + (4 + 2\sqrt{5} - \sqrt{25})$       b)  $(1 - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{4})(3 - 2\sqrt{2})$   
 c)  $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$       d)  $(4\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{51})(\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{2})$



**8.51.** Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.

- a)  $(x-1)^3 + (2-x)^3$       b)  $(2+x)^3 + 2(x-1)^3$   
 c)  $(x+1)(x^2-x+1) + (1-x)^3$       d)  $3x-2(1-x+2x+4) - (x+3)^3$   
 e)  $(x+4)^3 - (4-x)(x^2+4x+16)$       f)  $(\sqrt[3]{5}+x)^3 - (\sqrt[3]{5}-x)^3 - 6\sqrt[3]{25}x$

**8.52.** Wykonaj działania, przeprowadź redukcję wyrazów podobnych

- a)  $(x+1)^3 - (2x-3)^2 - (x+3)^2 + 2(x-2)(x+2)$   
 b)  $(2x-5)^2(x-1) - (3x+1)^2(x+1) - (x-1)(x^2+x+1)$   
 c)  $(2x-1)^3 - (x+1)^3 + (x+2)^3 - (x+2)(x^2-2x+4)$   
 d)  $(2x-3y)^2 - (3x-y)(3x+y) + (x-2y)^2 - (8x-7y)(-2y)$   
 e)  $(x^2-1)^2 - (x-1)(x^2+1)(x+1) + 4x^2(x^2+1)$   
 f)  $(3x-1)^3 - 3(x+1)(x^2-x+1) + 2(x-2)^2$

**8.53.** Rozwiąż równanie

- a)  $(x-1)^3 + 35 = 4(x+1)^2 - (2-x)(4+2x+x^2)$   
 b)  $(2+x)^3 + 9x = 10 - (2-x)^3 + (2x-1)^2$   
 c)  $2(3x-5)^2 + 3(x+1)(x^2-x+1) = (x+3)^2 + 2x(x^2-25) + 72$   
 d)  $(x-4)^3 - 12(x+2)^2 + 20x(x-4) = -9 - (x^2+3x+9)(3-x)$

**8.54.** Rozwiąż nierówność

- a)  $(x-2)^3 + 7x^2 + (2+x)(x^2-2x+4) > 2x^3 + 12x + 25$   
 b)  $(x-4)(x^2+4x+16) - 2(x-1)^3 \geq 5(x-4)(x+3) - x^3$   
 c)  $x^2(x-5) - (x-2) - 3x - 12(x-1)$   
 d)  $(3+x)^3 + (2x-1)(4x^2+2x+1) - 11(3x+4) < 9x^2(x+1) - (x^3+2)$

**8.55.** Zamień na iloczyn wyrażenia

- a)  $x^3 - 3x^2 - 3x - 1$       b)  $x^3 + 18x^2 + 108x + 216$   
 c)  $27 - 27y + 9y^2 - y^3$       d)  $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$   
 e)  $1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$       f)  $1 - 15y + 75y^2 - 125y^3$

**8.56.** Zamień na iloczyn wyrażenia

- a)  $y^3 + 8$       b)  $1 - x^3$       c)  $27r^3 - 1$       d)  $8k^3 - 125$   
 e)  $64 + 27y^3$       f)  $125a^3 + 216$       g)  $5\sqrt{5} + x^3$       h)  $y^3 - 2\sqrt{2}$

**8.57.** Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

- a)  $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$       b)  $\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$       c)  $\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25}}$       d)  $\frac{2}{2-\sqrt[3]{2}}$   
 e)  $\frac{2}{3\sqrt[3]{5}}$       f)  $\frac{7}{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{9}}$       g)  $\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{4} + 1}$       h)  $\frac{\sqrt[3]{3} - 2}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}$

**8.58.** Rozwiąż równania i nierówności

- a)  $|4-x| = (\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 9)(\sqrt[3]{2} + 3)$   
 b)  $(\sqrt[3]{5} - 1)(1 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{36}) < |x + 5|$   
 c)  $3|x-2| \leq (2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{10})(\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{50} + 4\sqrt[3]{25})$   
 d)  $(\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 4)(\sqrt[3]{3} - 2) = |3x + 2|$   
 e)  $|3-x| \geq (\sqrt[3]{4} - 2)(4 + 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16})$   
 f)  $2|x+1| - (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{4} - 2 - \sqrt[3]{16}) > 3|x+1|$

### Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu

**D 8.59.** Wykaż, że liczba  $207^3 + 148^3$  jest podzielna przez 71

**D 8.60.** Wykaż, że liczba  $536^3 - 134^3$  jest podzielna przez 103

**D 8.61.** Wykaż, że jeśli liczba całkowita przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to sześć cian tej liczby przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

**D 8.62.** Liczba całkowita  $a$  przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, zaś liczba całkowita  $b$  przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Wykaż, że suma sześcianów tych liczb jest podzielna przez 4.

**D 8.63.** Liczba całkowita  $c$  przy dzieleniu przez 6 daje resztę 2. Wykaż, że liczba  $4 + c$  jest podzielna przez 12.

**D 8.64.** Liczba całkowita  $c$  przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby  $c^3 - 2$  przez 3 jest równa 2.

**D 8.65.** Wykaż, że jeśli liczba parzysta jest niepodzielna przez 6, to sześcian tej liczby przy dzieleniu przez 6 daje resztę 2 lub 4.

**D 8.66.** Wykaż, że jeśli  $a + b = 5$  i  $a \cdot b = 7$ , to  $a^3 + b^3 = 230$ .

**D 8.67.** Wykaż, że jeśli  $a + b = 4$  i  $a \cdot b = 9$ , to  $a^3 + b^3 = 172$ .

**D 8.68.** Wykaż, że liczba  $(1 + \sqrt{2})^7 + 5\sqrt{2}$  jest liczbą całkowitą.

**D 8.69.** Wykaż, że liczba  $(26 - 15\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$  jest liczbą naturalną.

**D 8.70.** Wykaż, że liczba  $\sqrt{\sqrt{2} + 1}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$  jest liczbą naturalną.

**D 8.71.** Wykaż, że liczba  $209^{23} - 45^{23}$  jest podzielna przez 164.

**D 8.72.** Wykaż, że liczba  $384^{38} - 120^{38}$  jest podzielna przez 11.

**D 8.73.** Wykaż, że liczba  $26^{24} - 15^{24}$  jest podzielna przez 41.

**D 8.74.** Wykaż, że liczba  $3^{18} - 2^{18}$  jest podzielna przez 19.

**D 8.75.** Wykaż, że liczba  $3^{36} - 2^{36}$  jest podzielna przez 13.

**D 8.76.** Wykaż, że liczba  $8^{11} - 5^{11}$  jest podzielna przez 13.

**D 8.77.** Wykaż, że liczba  $6^{13} - 9^{13}$  jest podzielna przez 15.

**D 8.78.** Wykaż, że liczba  $2^{36} - 3^{36}$  jest wielokrotnością liczby 7.

**D 8.79.** Wykaż, że liczba:

a)  $(\sqrt{16} + \sqrt{4} + 1)(\sqrt{16} - 1)(\sqrt{16} - \sqrt{4} + 1)$  jest liczbą naturalną, podzielną przez 15

b)  $(\sqrt{81} - 4)(\sqrt{81} - 2\sqrt{9} + 4)(\sqrt{81} - 2\sqrt{9} - 4)$  jest liczbą naturalną, podzielną przez 17

**D 8.80.** Wykaż, że liczba  $3 - \sqrt{5} - \sqrt{7} - 3\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$  jest liczbą całkowitą parzystą.

**D 8.81.** Wykaż, że dana liczba jest całkowitą

a)  $\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt{3}$

b)  $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} - \sqrt{2}$

**D 8.82.** Reszta z dzielenia liczby całkowitej dodatniej  $a$  przez 6 jest równa 1. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby  $3^a$  przez 13 jest równa 3.

**D 8.83.** Reszta z dzielenia liczby całkowitej dodatniej  $b$  przez 4 jest równa 3. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby  $2^b$  przez 12 jest równa 8.

## Podzielność wielomianów

**8.84.** Podaj przykład wielomianu pierwszego stopnia, przez który jest podzielny wielomian  $W(x)$ , jeśli:

a)  $W(x) = x^3 - 1$

b)  $W(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

c)  $W(x) = 81 - x^4$

d)  $W(x) = 8 + 125x^3$

e)  $W(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8$

f)  $W(x) = x^5 - 32$

g)  $W(x) = 27x^6 - 64$

h)  $W(x) = 4x^6 - 4x - 1$

**8.85.** Wskaż cztery wielomiany pierwszego stopnia, przez które jest podzielny wielomian  $W(x)$ , jeśli  $W(x) = (4x^2 - 9)(x^2 - 4x - 5)$ .

**8.86.** Wskaż pięć wielomianów pierwszego stopnia, przez które jest podzielny wielomian  $W(x)$ , jeśli  $W(x) = (x^3 + 125)(6x^2 + 13x - 10)(4x^2 - 9)$ .

**8.87.** Podaj przykład wielomianu drugiego stopnia, przez który jest podzielny wielomian  $W(x)$ , jeśli:

a)  $W(x) = (x + 1)(x^2 + 8)(x - 3)$

b)  $W(x) = 27x^3 - 1000$

c)  $W(x) = 125x^3 + 216$

d)  $W(x) = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

**8.88.** Dany jest wielomian  $W(x) = 3x^3(4 - x)(x + 2)$ . Wskaż trzy wielomiany stopnia trzeciego, przez które jest podzielny wielomian  $W(x)$ .

8.89. Dany jest wielomian  $W(x) = (9x^3 - 1)(x^2 - 4x)$ . Podaj przykład wielomianu,

- a) stopnia pierwszego                      b) stopnia drugiego  
c) stopnia trzeciego                        d) stopnia czwartego,

przez który jest podzielny wielomian  $W(x)$

8.90. Podaj przykład wielomianu  $F(x)$  stopnia pierwszego, takiego, że wielomian  $W(x) = x^2 + 10x + 25$ ,  $F(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = x^2 + 4x + 5$ .

8.91. Podaj przykład wielomianu  $F(x)$  stopnia pierwszego, takiego, że wielomian  $W(x) = 8x^3 - 1$ ,  $F(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = 2x^2 + 5x + 3$ .

8.92. Podaj przykład wielomianu  $F(x)$  takiego, że wielomian  $W(x) = (3 - x)(4 + 5x)F(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = x^2 + 9x + 18$ .

8.93. Podaj przykład wielomianu  $F(x)$  takiego, że wielomian  $W(x) = x^2 - 21(x - x - 6)F(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = x^2 + 6x + 12x + 8$ .

8.94. Wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$ . Wielomian  $Q(x) = 4 + 3x$  jest ilorazem z dzielenia  $W(x)$  przez  $P(x)$ . Wyznacz  $P(x)$ , jeśli

- a)  $W(x) = 16 - 9x^2$                       b)  $W(x) = 9x^2 + 24x + 16$                       c)  $W(x) = -3x^2 - x + 4$ .

8.95. Wielomian  $W(x) = 10x^3 - 11x^2 - ax - b$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = 1 - 2x$  ilorazem z dzielenia  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x) = 5x^2 - 3x + 2$ . Oblicz  $a$  i  $b$ .

8.96. Wielomian  $W(x) = 3x^3 + (3a - b)x^2 - 4a + 9b$ ,  $x + 30$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = 3x + 5$  ilorazem z dzielenia  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x) = x^2 - 4x + 6$ . Oblicz  $a$  i  $b$ .

8.97. Wielomian  $W(x) = 6x^4 + (a - b)x^3 + 21x^2 + (2a - 3b)x + 15$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$  ilorazem z dzielenia  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x) = -2x^2 + x + 3$ . Oblicz  $a$  i  $b$ .

8.98. Wielomian  $W(x) = 6x^3 - x^2 - 10x - 8$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$  ilorazem z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x) = 2x^2 + x + 4$ . Wyznacz  $P(x)$ .

8.99. Wielomian  $W(x) = 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 10x - 15$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$  ilorazem z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x) = x^2 - 2x + 5$ . Wyznacz  $P(x)$ .

8.100. Wielomian  $W(x) = 8x^3 - 27(2x - 7)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$  ilorazem z dzielenia  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x) = 4x^2 + 6x + 9$ . Wyznacz  $P(x)$ .

8.101. Wielomian  $W(x) = x^3 + 216(3x + 5)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = 3x^2 + 23x + 10$  ilorazem z dzielenia  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x)$ . Wyznacz  $Q(x)$ .

8.102. Wielomian  $W(x) = 2x^3 - 3(3x + 1)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = 6x^2 - 7x - 3$  ilorazem z dzielenia  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x)$ . Wyznacz  $Q(x)$ .

8.103. Wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$  ilorazem z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x)$ . Wyznacz wielomian  $Q(x)$ , jeśli

- a)  $W(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 1$                        $P(x) = (x - 2)(x + 1)$   
b)  $W(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x^2 - x + 2x - 2$                        $P(x) = (x^2 - x - 2)$

8.104. Wielomian  $W(x) = x^3 - 3x^2 - 1(x + 2x - 2)^2$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$  ilorazem z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x) = 5x^2 + 8x + 3$ . Wyznacz  $P(x)$ .

8.105. Wielomian  $W(x) = x^4 - x^3 - 2(x - 3x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = x^2 + x + x + 3$  ilorazem z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest wielomian  $Q(x)$ . Wyznacz  $Q(x)$ .

8.106. Wielomian  $W(x) = (x - 6) - 4(x - 1)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$ . Wielomian  $Q(x) = x^2 - 2x + 4$  jest ilorazem z dzielenia  $W(x)$  przez  $P(x)$ . Wyznacz  $P(x)$ .

D 8.107. Uzasadnij, że wielomian

- a)  $W(x) = (6x^2 + 19x + 2)(x^2 + 5x + 5)$  jest podzielny przez dwumian liniowy  $P(x) = 5x + 1$   
b)  $W(x) = (3x - 1)^2(x - 2)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = 13x^2 - 17x + 7$   
w każdym przypadku wyznacz iloraz  $Q(x)$  z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$

## Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy Schemat Hornera

**8.108.** Wykonaj dzielenie

- a)  $(x^3 - 6x^2 + 12x - 16) : (x - 4)$       b)  $(x^3 - x^2 - 5x + 21) : (x + 3)$   
c)  $(x^3 - 3x^2 + 3x - 2) : (x - 2)$       d)  $(x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1) : (x - 1)$

**8.109.** Wykonaj dzielenie:

- a)  $(100x^3 - 120x^2 + 47x - 6) : (x - \frac{2}{5})$       b)  $(38x^3 + 7x^2 - 8x - 1) : (x - \frac{1}{2})$   
c)  $(116x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1) : (x + \frac{1}{4})$       d)  $(2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3) : (x + \frac{3}{2})$

**8.110.** Wykonaj dzielenie

- a)  $(2x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 5x - 6) : (2x - 3)$   
b)  $(12x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 6x + 1) : (4x - 1)$   
c)  $(-2x^4 + x^3 - 16x^2 + 4) : (-2x + 1)$   
d)  $(3x^3 + 2x^2 - 12x - 8) : (3x - 2)$

**8.111.** Wykonaj dzielenie z resztą:

- a)  $(3x^2 - 2x + 1) : (x + 2)$       b)  $(-2x^2 + 4x - 3) : (x - 1)$   
c)  $(4x^4 + 3x^2 - 6x + 3) : (x + 1)$       d)  $(-3x^4 + 2x^3 + 4) : (x - 3)$   
e)  $(x^3 + 4x^2 - 2x + 1) : (x + 3)$       f)  $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1) : (x - 2)$

**8.112.** Wykonaj dzielenie, stosując schemat Hornera.

- a)  $(x^3 + 2x^2 + x - 4) : (x - 1)$       b)  $(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) : (x + 2)$   
c)  $(3x^3 - 4x^2 - x - 6) : (x - 2)$       d)  $(2x^3 + 7x^2 + 8x + 15) : (x + 3)$

**8.113.** Wykonaj dzielenie, stosując schemat Hornera

- a)  $(3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1) : (x + 1)$   
b)  $(2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 3) : (x - 0,5)$   
c)  $(3x^4 - x^3 + 5x^2 + 7x - 3) : (x - \frac{1}{3})$   
d)  $(5x^4 + 9x^3 - 2x^2 + 5x - 1) : (x - \frac{1}{5})$

**8.114.** Wykonaj dzielenie, stosując schemat Hornera:

- a)  $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1)$       b)  $(2x^3 + x + 18) : (x + 2)$   
c)  $(-x^3 + 4x + 3) : (x + 1)$       d)  $(5x^3 - 7x - 26) : (x - 2)$   
e)  $(2x^4 - 5x + 3) : (x - 1)$       f)  $(-3x^4 + 2x^3 + 1) : (x + 2)$

**8.115.** Wykonaj dzielenie z resztą, stosując schemat Hornera:

- a)  $(3x + 5) : (x + 4)$       b)  $(-4x + 1) : (x - 7)$   
c)  $(x - 1) : (x + 2)$       d)  $(3x^4 - 2x + 8) : (x - 2)$   
e)  $(5x^3 + 2x^2 + 7) : (x - 1)$       f)  $(-2x^3 + 4x^2 + 6) : (x + 3)$

**8.116.** Wykonaj dzielenie:

- a)  $(2x^4 + 3x^3 - 15) : (x - 1)$       b)  $(3x^4 - 2x + 16) : (x - 2)$   
c)  $(x^4 + 1) : (x + 1)$       d)  $(x - 1) : (x - 1)$   
e)  $(x^2 + 1) : (x - 1)$       f)  $(x^3 - 1) : (x - 1)$

**8.117.** Oblicz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $P(x)$ , jeśli:

- a)  $W(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ ,       $P(x) = x - 2$   
b)  $W(x) = x^4 - 2x^3 + 4$ ,       $P(x) = x + 1$   
c)  $W(x) = 3x^4 + 4x^3 + 9$ ,       $P(x) = x - 1$   
d)  $W(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ ,       $P(x) = x - 3$

**8.118.** Dany jest wielomian  $W(x) = x^3 + (k^2 + 1)x^2 - 2kx - 15$ .

a) Dla  $k = 1$  oblicz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x + 3$

b) Uzasadnij, że jeśli  $k = 5$  lub  $k = 3$  to wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $x + 1$

**8.119.** Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = m^2x^3 - 5x^2 - 3m$  przez dwumian  $x - 1$  jest równa  $-1$ . Oblicz  $m$ .

**8.120.** Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = m^2x^3 - 8x^2 + 5m$  przez dwumian  $x + 1$  jest równa  $2$ . Oblicz  $m$ .

**8.121.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  dla których reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + ax^2 + a^2x + 2$  przez dwumian  $x - 1$  jest większa od  $3$ .

**8.122.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  dla których reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{1}{4}ax^2 + a^2x - 1$  przez dwumian  $x - 2$  jest mniejsza od  $4$ .

## Dzielenie wielomianu przez wielomian stopnia większego od 1

8.123. Wykonaj dzielenie:

a)  $(6x^4 + 13x^3 + x - 2) : \left(x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1\right)$

b)  $(8x^4 - 6x^3 - 17x - 6) : (8x^3 - 10x - 12)$

c)  $(24x^3 - 26x^2 + 9x - 1) : (12x^2 - 7x + 1)$

d)  $(12x^3 + 16x^2 + 7x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

8.124. Wykonaj dzielenie:

a)  $(x^5 + 3x^3 + 2x) : (x^2 + 1)$

b)  $(x^6 + x^4 - 2x^3 - 3x - 3) : (x^3 + x + 1)$

c)  $(x^4 - 9x^3 - 3x^2 - 9x) : (x^2 - 2x - 8)$

d)  $(x^5 + x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 15x - 3) : (x^2 - 2x - 1)$

e)  $(x^5 + x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 15x - 3) : (x^2 - 2x - 1)$

f)  $(x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1) : (x^2 - 2x - 1)$

8.125. Wyznacz iloraz  $Q(x)$  i resztę  $R(x)$  z dzielenia:

a)  $(x^3 + x^2 - 6x + 8) : (x^2 - 3x + 1)$

b)  $(x^3 + 5) : (x^2 + 5)$

c)  $(4x^3 - 3x^2 - 1) : (4x^2 - 4x - 1)$

d)  $(3x^3 - 6x^2 - 13x^3) : (6x^3 + 4x + 2)$

e)  $(8x^3 + 4x^2 - 1) : (2x^2 - 5x + 1)$

f)  $(2x^3 - x^2 - 2x - 1) : (2x^2 + 1)$

8.126. Wyznacz iloraz  $Q(x)$  i resztę  $R(x)$  z dzielenia:

a)  $(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^2 - 5) : (x^2 - 1)$

b)  $(2x^4 - x^3 + 3x^2 + 7) : (x^2 + 2)$

c)  $(x^4 - x^3 - 2x^2 + 5x + 3x - x) : (x^2 - 2)$

d)  $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x^3 + 2x + 4) : (2x^2 + x^2 - 1)$

e)  $(x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x^4 - 3x^2 + 7x - 1) : (x^3 + x^2 - 3x + 2)$

f)  $(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 9x^2 + 2x^3 - 5x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 3) : (x^2 - 3x^2 + 2)$

8.127. Po podzieleniu wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3$  otrzymujemy iloraz  $Q(x) = 2x - 1$  i resztę  $R(x) = x - 5x + 6$ . Wyznacz wielomian  $W(x)$  w postaci uporządkowanej.

8.128. Po podzieleniu wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = 2x^2 + 5x - 1$  otrzymujemy iloraz  $Q(x) = 5x - 7$  i resztę  $R(x) = 3x - x$ . Wyznacz wielomian  $W(x)$  w postaci uporządkowanej.

8.129. Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez dwumian  $x + 3$  daje resztę 6, a przy dzieleniu przez dwumian  $x - 2$  daje resztę 1. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian  $P(x) = (x - 2)(x + 3)$ .

8.130. Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez dwumian  $x + 2$  daje resztę 8, a przy dzieleniu przez dwumian  $x + 1$  daje resztę 4. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez trójmian kwadratowy  $P(x) = x^2 + 3x + 2$ .

8.131. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez trójmian kwadratowy  $P(x) = (x + 4)(x - 2)$  jest równa  $5x + 2$ . Oblicz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x + 4$ .

8.132. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^2 - 1$  jest trójmianem kwadratowym  $2x - 3x - 1$ . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x - 1$ .

8.133. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = (x - 1)(x - 2)$  jest równa  $3x - 5x - 2$ . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $F(x) = (x - 1)(x + 2)$ .

8.134. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$  jest równa  $x^3 - 5x + 1$ . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $F(x) = x^2 - 4$ .

8.135. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = x^3 - 2x^2 + bx + b$  przez wielomian  $P(x) = (x - 1)(x + 2)$  jest równa  $9x - 3$ . Oblicz  $a$  i  $b$ .

8.136. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = x^4 + (a + b)x^3 + 2x^2 + bx + 6$  przez wielomian  $P(x) = x^2 + 4x + 3$  jest równa  $x + 9$ . Oblicz  $a$  i  $b$ .

8.137. Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez dwumiany  $x + 1$ ,  $x + 2$ ,  $x - 1$  daje reszty odpowiednio równe 2, 3, 6. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ .

8.138. Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez dwumiany  $x - 2$  i  $x + 4$  daje reszty odpowiednio 3 oraz 5. Wiedząc, że wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $x - 1$ , wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^2 + 3x - 4$ .



8.139. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 3x + b$  przez wielomian  $P(x) = x^2 - 3x + 3$  jest wielomianem zerowym. Oblicz  $a$  i  $b$ .

8.140. Wielomian  $W(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - bx + 2$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = x^2 + 2x + b$ . Oblicz  $a$  i  $b$ .

### Pierwiastek wielomianu Twierdzenie Bezouta

8.141. Sprawdź, czy podana obok wielomianu  $W(x)$  liczba  $c$  jest jego pierwiastkiem.

a)  $W(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ ,  $c = 1$

b)  $W(x) = 5x^3 - 2x^2 - 6x - 20$ ,  $c = 2$

c)  $W(x) = 6x^4 - 3x^3 + 5x + 3$ ,  $c = -1$

d)  $W(x) = x^4 + 7x^3 - 16x^2 - 24$ ,  $c = 2$

8.142. Dany jest wielomian  $W(x)$  i zbiór  $A$ . Sprawdź, które liczby ze zbioru  $A$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x)$ .

a)  $W(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ ,  $A = \{-1, \sqrt{2}, 3\}$

b)  $W(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ ,  $A = \{\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 1, \sqrt{2}\}$

8.143. Wielomian  $W(x)$  jest zapisany w postaci iloczynu wielomianów pierwszego i drugiego stopnia. Podaj stopień wielomianu  $W(x)$ , wyznacz pierwiastki tego wielomianu.

a)  $W(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(5 - 2x)(x^2 + 1)$

b)  $W(x) = (81x^4 - 4)(x^2 - x - 6)(3 - x)(x + 5)$

c)  $W(x) = 5x(2x^2 + x + 1)(9x^2 - 6x + 1)(4 + x^2)$

d)  $W(x) = (x^2 + 3x + 4)(1 - 2x + 8x^2)(x^2 - 9)$

8.144. Podaj przykład wielomianu  $W(x)$  szóstego stopnia, zapisanego w postaci iloczynowej i którego pierwiastkami są liczby:

a) 0, 1, 2, 3, 4, 5

b)  $-\sqrt{5}$ ,  $-\sqrt{3}$ , 0,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$

c) -1, 1, 3

d) -2.

8.145. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $P(x)$ , jeśli:

a)  $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ ,  $P(x) = x - 3$

b)  $W(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 14$ ,  $P(x) = x + 2$

c)  $W(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2x + 9$ ,  $P(x) = x - 1$

d)  $W(x) = 3x^3 + 8x^2 + 4x + 1$ ,  $P(x) = x - 1$

8.146. Wyznacz liczbę  $k$  dla której wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $P(x)$ , jeśli:

a)  $W(x) = 2x^3 - (3k + 2)x^2 - 6kx - 18$ ,  $P(x) = x - 3$

b)  $W(x) = x^3 - (4k + 3)x^2 - (6k - 3)x - 25$ ,  $P(x) = x - 5$

c)  $W(x) = 2x^3 + 3k^2x^2 + kx - 20$ ,  $P(x) = x - 2$

d)  $W(x) = x^3 + 2x^2 - k^2x + 5k + 7$ ,  $P(x) = x + 3$

8.147. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu  $W(x)$  wiedząc, że wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez  $P(x)$ , jeśli:

a)  $W(x) = 3x^3 + 20x^2 + 11x - 6$ ,  $P(x) = x - 1$

b)  $W(x) = 2x^3 - 10x^2 + 10x - 8$ ,  $P(x) = x - 4$

c)  $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 20x + 21$ ,  $P(x) = x + 3$

d)  $W(x) = 6x^3 - 6x^2 - 18x - 4$ ,  $P(x) = x - 2$

e)  $W(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ ,  $P(x) = x - 3$

f)  $W(x) = x^3 + 2x - 3$ ,  $P(x) = x - 1$

8.148. Dany jest wielomian  $W(x)$  i liczba  $c$ . Wykaż, że liczba  $c$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ . Następnie wyznacz pozostałe pierwiastki wielomianu  $W(x)$ , o ile istnieją.

a)  $W(x) = x^3 - x^2 - 16x - 20$ ,  $c = 2$

b)  $W(x) = x^3 - x^2 - 8x + 8$ ,  $c = 1$

c)  $W(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ ,  $c = 3$

d)  $W(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 25$ ,  $c = -5$

8.149. Wykaż, że liczba  $c$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ . Następnie wyznacz pozostałe pierwiastki wielomianu  $W(x)$ , o ile istnieją.

a)  $W(x) = x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 - 3x - 6$ ,  $c = -2$

b)  $W(x) = x^3 - x^2 + 3x^2 - 3x^2 + 2x - 2$ ,  $c = 1$

c)  $W(x) = 2x^3 + 2x^4 - 20x^3 - 20x^2 + 18x - 18$ ,  $c = -1$

d)  $W(x) = x^3 - 2x^4 - 15x^3 + 30x^2 - 16x + 32$ ,  $c = 2$

**8.150.** Wyznacz liczbę  $a$  dla której liczba  $c$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ . Dla obliczonej wartości  $a$ , podaj pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

- a)  $W(x) = x^3 + 2x^2 - x + a$ ,  $c = 1$   
 b)  $W(x) = 3x^3 - (4a + 5)x^2 + 28x - 4a$ ,  $c = 2$

**8.151.** Wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez podany obok wielomian dwumian. Oblicz  $a$ . Następnie wyznac wszystkie pierwiastki wielomianu  $W(x)$ .

- a)  $W(x) = 4x^3 + 3x^2 + ax - 2$ ,  $x + \frac{1}{4}$   
 b)  $W(x) = 4x^3 + 6ax^2 + (4a + 2)x - 12$ ,  $x - \frac{1}{2}$

**8.152.** Liczby  $x_1, x_2$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x)$ . Oblicz  $a, b$ . Następnie znajdź trzeci pierwiastek wielomianu  $W(x)$ .

- a)  $W(x) = x^3 - (a + b)x^2 - (a - b)x + 3$ ,  $x_1 = 1, x_2 = 3$   
 b)  $W(x) = 2x^3 + (a + b)x^2 + (5b + 3a)x - 8$ ,  $x_1 = 4, x_2 = -\frac{1}{2}$

**8.153.** Oblicz wartości współczynników  $a, b$  wielomianu  $W(x)$  wiedząc, że wielomian ten jest podzielny przez podany obok trójmian kwadratowy  $P(x)$ . Podaj wszystkie pierwiastki wielomianu  $W(x)$ .

- a)  $W(x) = x^3 - ax^2 - bx + 6$ ,  $P(x) = (x - 1)(x - 2)$   
 b)  $W(x) = 3x^3 + ax^2 - 15x + b$ ,  $P(x) = 3x^2 + 11x - 4$

**D 8.154.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej, dodatniej  $n$  wielomian  $W(x) = nx^{n+1} - (n-1)x^n - 1$  jest podzielny przez dwumian  $x - 1$ .

**D 8.155.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej, dodatniej  $n$  wielomian  $W(x) = x^{2n+1} + (n-1)x^2 + nx + 2$  jest podzielny przez dwumian  $x + 1$ .

**8.156.** Wielomian  $W(x)$  jest trzeciego stopnia. Pierwiastkami wielomianu  $W(x)$  są liczby  $-2, 1, 4$ . Wiedząc, że reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x + 1$  jest równa  $30$ , zapisz wzór wielomianu  $W(x)$  w postaci uporządkowanej.

**8.157.** Wielomian  $W(x)$  jest czwartego stopnia, a suma wszystkich jego współczynników wynosi  $4$ . Wyznacz wzór tego wielomianu wiedząc, że jest on podzielny przez wielomian  $P(x) = x^2 - 4x - x + 6$  a reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x + 2$  jest równa  $-140$ .

**8.158.** Wielomian  $W(x) = x^3 - 9x^2 + mx + n$  ma trzy pierwiastki  $x_1, x_2, x_3$  takie, że  $x_1 = x_2 + 2$  oraz  $x_3 = x_2 + 4$ . Wyznacz

- a) pierwiastki wielomianu  $W(x)$  b) liczby  $m$  i  $n$ .

**8.159.** Wielomian  $W(x) = x^3 - ax^2 - bx - 27$  ma trzy pierwiastki  $x_1, x_2, x_3$  takie, że  $x_2 = -3x_1$  oraz  $x_3 = 9x_1$ . Wyznacz

- a) pierwiastki wielomianu  $W(x)$  b) liczby  $a$  i  $b$ .

**8.160.** Wielomian  $W(x) = x^3 - 9x^2 + (b - 5)x - 15$  ma trzy pierwiastki  $x_1, x_2, x_3$  takie, że  $x_1 = x_2 + a$  oraz  $x_3 = x_2 + 2a$  gdzie  $a \neq 0$ . Wyznacz liczby  $a, b$  oraz pierwiastki wielomianu  $W(x)$ .

**8.161.** Wielomian  $W(x) = x^3 - 14x^2 + 56x - 64$  ma trzy pierwiastki  $x_1, x_2, x_3$  takie, że  $x_1 = ax_2$  oraz  $x_3 = a^2x_2$ , gdzie  $a \neq 0$ . Wyznacz liczbę  $a$  oraz pierwiastki wielomianu  $W(x)$ .

## Pierwiastki wymierne wielomianu

**8.162.** Wyznacz całkowite pierwiastki wielomianu  $W(x)$ , jeśli:

- a)  $W(x) = x^3 - 4x^2 + x - 6$  b)  $W(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$   
 c)  $W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$  d)  $W(x) = 3x^3 + 7x^2 - 4$   
 e)  $W(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 - 9x - 18$  f)  $W(x) = 5x^4 + 15x^3 - 19x^2 + 3x - 4$

**D 8.163.** Wykaż, że wielomian  $W(x) = 4x^4 - 4x^3 - 11x^2 - x - 3$  nie ma pierwiastków całkowitych.

**D 8.164.** Wykaż, że wielomian  $W(x) = x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 10$  ma tylko całkowite pierwiastki.

**8.165.** Wyznacz całkowite pierwiastki wielomianu  $W(x)$ .

- a)  $W(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$  b)  $W(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{3}x + 2$   
 c)  $W(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 5x + 12$  d)  $W(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 7x + 12$

**8.166** Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu  $W(x)$  wiedząc, że ten wielomian ma pierwiastek całkowity

- a)  $W(x) = x^2 + 2x^2 - 3x - 10$       b)  $W(x) = 3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$   
 c)  $W(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 36$       d)  $W(x) = -2x^3 + 28x - 16$   
 e)  $W(x) = 2x^3 + 4x - 24$       f)  $W(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$   
 g)  $W(x) = 4x^3 - 8x^2 - 4x^2 + 8x^2 + x - 2$       h)  $W(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 8x + 8$

**D 8.167** Wykaż, że jeśli  $a \in \mathbb{Z}$  oraz wielomian  $W(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - ax + 2$  ma pierwiastek, będący liczbą pierwszą, to wielomian  $W(x)$  ma dwa pierwiastki całkowite

**D 8.168** Wykaż, że jeśli  $a \in \mathbb{Z}$  oraz wielomian  $W(x) = x^4 - ax^2 + x - 12$  ma pierwiastek, który jest nieparzystą liczbą pierwszą, to reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $x - 1$  jest równa  $-12$ .

**D 8.169** Współczynniki  $a, b$  wielomianu  $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 5x + 6$  są liczbami całkowitymi, a dwa pierwiastki wielomianu  $W(x)$  są liczbami pierwszymi

- a) Oblicz  $a$  i  $b$ .  
 b) Wykaż, że wielomian  $W(x)$  ma tylko dwa pierwiastki.

**8.170** Wielomian  $W(x) = x^3 - ax^2 - x - 5$  ma trzy całkowite pierwiastki. Wiedząc, że  $a$  jest liczbą pierwszą, wyznacz pierwiastki wielomianu  $W(x)$ .

**8.171** Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu  $W(x)$  jeśli

- a)  $W(x) = 5x^3 + 4x^2 + 4x - 1$       b)  $W(x) = 6x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 2$   
 c)  $W(x) = 12x^3 - 8x^2 - 79x - 15$       d)  $W(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$   
 e)  $W(x) = 3x^4 + 11x^3 + 9x^2 - x - 2$       f)  $W(x) = 6x^4 + x^3 - 13x^2 - 2x + 2$

**D 8.172** Wykaż, że wielomian  $W(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 4x - 10$  nie ma pierwiastków wymiernych.

**D 8.173** Wykaż, że wielomian  $W(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 3$  ma tylko pierwiastki wymierne

**8.174** Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu  $W(x)$  jeśli

- a)  $W(x) = x^3 - 19x + 30$       b)  $W(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$   
 c)  $W(x) = 12x^3 + 22x^2 + 12x + 2$       d)  $W(x) = x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$   
 e)  $W(x) = 2x^3 + \frac{17}{5}x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{22}{5}$       f)  $W(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x + \frac{3}{16}$

**8.175** Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu  $W(x)$ , jeśli:

- a)  $W(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$       b)  $W(x) = 3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$   
 c)  $W(x) = 2x^3 - 28x - 16$       d)  $W(x) = x^3 - 2x^2 - 15x - 36$   
 e)  $W(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 6$       f)  $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 24$   
 g)  $W(x) = 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 15x - 6$       h)  $W(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$ .

**8.176** Wykaż, że dana liczba jest niewymierna

- a)  $\sqrt[3]{5}$       b)  $2\sqrt[3]{5}$       c)  $\sqrt{4}$       d)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

**8.177** Wykaż, że dana liczba jest naturalna.

- a)  $\sqrt{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt{26 - 15\sqrt{3}}$   
 b)  $\sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$

## Pierwiastek wielokrotny

**8.178** Podaj pierwiastki wielomianu  $W(x)$  i określ krotność każdego z nich

- a)  $W(x) = (2x - 1)(x^2 + 8)(x - 9)^4$   
 b)  $W(x) = (3x + 2)(9x^2 + 12x + 4)(4 - 9x^2)(x + 5)$   
 c)  $W(x) = (x^2 - 4)^3(x^2 - x - 6)(x^2 - 9)$   
 d)  $W(x) = (x - 2)^2(2x - 3x - 9)(x^2 - 3x - 1)(2x + 3)$

**8.179** Podaj pierwiastki wielomianu  $W(x)$  i określ krotność każdego z nich

- a)  $W(x) = (x^2 + 4x + 4)(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)(x^2 - 4)$   
 b)  $W(x) = (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)(1 - 4x^2)(8x^3 - 1)$

**8.180** Wielomian  $W(x)$  jest stopnia trzeciego, ma trzy pierwiastki  $-2$ ,  $x$  oraz  $4$ . Czy wielomian  $P(x) = W(x)(x + 3x - 3x - 1)$  ma pierwiastek wielokrotny? jeśli tak, podaj ich krotność.

**8.181** Wielomian  $W(x)$  jest stopnia drugiego, ma pierwiastek dwukrotny równy  $2$ . Czy wielomian  $P(x) = W(x)(x - 4)$  ma pierwiastek wielokrotny? jeśli tak, to podaj jego krotność.

**D 8.182** Wykaz, że liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ . Następnie określ krotność tego pierwiastka

a)  $W(x) = 6x^3 + 3x^2 + 10x + 5$ ,  $a = \frac{1}{2}$

b)  $W(x) = x^3 + 4x^2 + 4x^2 - 6x^2 - 24x - 24$ ,  $a = -2$

**D 8.183** Wykaz, że liczba  $c$  jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$

a)  $W(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 4x + 2$ ,  $c = 1$

b)  $W(x) = x^3 - 6x^2 - 9x - 5x - 30x + 45$ ,  $c = 3$

**D 8.184** Wykaz, że liczba  $p$  jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$

a)  $W(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 14x + 12x - 8$ ,  $p = 2$

b)  $W(x) = 27x^3 - 27x^2 + 36x^2 - 28x^2 + 9x - 1$ ,  $p = \frac{1}{3}$

**8.185.** Podaj przykład wielomianu stopnia osiemego, który ma tylko dwa pierwiastki: 3 i 4 przy czym 3 jest pierwiastkiem trzykrotnym, a 4 jest pierwiastkiem jednokrotnym

**8.186.** Podaj przykład wielomianu stopnia siódmego o współczynnikach całkowitych, który ma tylko trzy pierwiastki: 3 i 4 oraz  $\frac{1}{2}$  przy czym 4 jest pierwiastkiem jednokrotnym,  $\frac{1}{2}$  pierwiastkiem dwukrotnym, a 3 pierwiastkiem czterokrotnym

**8.187** Wyznacz liczbę  $a$  wiedząc, że wielomian  $W(x)$  ma jeden pierwiastek dwukrotny

a)  $W(x) = (4x^2 + 32x + a)x$

b)  $W(x) = x^3 + ax^2 + 25x$

c)  $W(x) = (x^2 - 8x + a)x$

d)  $W(x) = -4x^3 + 4x^2 + ax^2$

**8.188.** Wielomian  $W(x)$  ma jeden pierwiastek trzykrotny. Oblicz  $a$  i  $b$ , jeśli

a)  $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$

b)  $W(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$

c)  $W(x) = 27x^3 + ax^2 + bx + 8$

d)  $W(x) = 8x^3 + ax^2 + 150x + b$

**8.189.** Liczba  $p$  jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ . Oblicz  $a$  i  $b$ , jeśli

a)  $W(x) = x^3 - ax^2 + bx + 12$ ,  $p = 2$

b)  $W(x) = x^4 + (a - b)x^3 + (a + b)x^2 + 5x + 8$ ,  $p = -2$

**8.190.** Liczba  $k$  jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ . Wyznacz liczby  $a$  i  $b$ , jeśli

a)  $W(x) = x^4 - 2x^3 + ax + b$ ,  $k = 1$

b)  $W(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + (a - b)x + a + 2b$ ,  $k = -1$

**8.191.** Liczba  $m$  jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ . Wyznacz liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , jeśli

a)  $W(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx^2 + cx - 1$ ,  $m = 1$

b)  $W(x) = x^4 + 5x^3 + ax^2 - bx - c$ ,  $m = -2$

**8.192.** Dany jest wielomian  $W(x) = (3x^2 - x - 2)(kx + 2)$ , gdzie  $k \neq 0$ .

a) Dla  $k = -2$  podaj pierwiastki wielomianu  $W(x)$  i ustal ich krotność.

b) Dla jakiej wartości  $k$  liczba  $\frac{2}{3}$  jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ ?

**8.193.** Dany jest wielomian  $W(x) = (2x - k)(k + 3)x^2 - 4x + k$  gdzie  $k \neq 3$

a) Dla  $k = 0$  podaj pierwiastki wielomianu  $W(x)$  i ustal ich krotność

b) Wyznacz wartość  $k$  tak, aby wielomian  $W(x)$  miał pierwiastek trzykrotny. Jaki to pierwiastek?

**8.194.** Dany jest wielomian  $W(x) = (x - 1)x^2 + (p + 3)x + 9$ . Ustal  $k$  odnosząc pierwiastków tego wielomianu, ze względu na wartość parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$

**8.195.** Dany jest wielomian  $W(x) = (x - 4x - 4)x^2 + (p + 3)x + 4$ . Ustal krotność pierwiastków tego wielomianu, ze względu na wartość parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$

## Rozkładanie wielomianów na czynniki

**8.196.** Rozłóż wielomiany na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia

a)  $625x^4 - 1$

b)  $x^4 - 2x^2 + 1$

c)  $-4 - 20x^2 - 25x^4$

d)  $81x^2 - 16$

e)  $(x - 4)^2 - (2x + 3)^2$

f)  $9x^2 - 6x + 1 - 2x + 5$

**8.197** Rozłóż wielomiany na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia.

- a)  $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$       b)  $2x^3 + 36x^2 + 54x + 27$   
 c)  $1 + 8x^3$       d)  $216x^3 - 125$   
 e)  $(x-5)^3 - 8x^3$       f)  $27x^3 - (2x+1)^3$

**8.198** Rozłóż dane wielomiany na czynniki, wyłączając wspólny czynnik poza nawias.

- a)  $4x^4 - 4x^3 + x^2$       b)  $(x^2 + 2)(2x - 3) + 5x(x^2 + 2)$   
 c)  $x(3x^2 + 1) - 4(3x^2 + 1)$       d)  $(5x - 1)(x^2 + 1) + (5x - 1)(6 - 2x^2)$   
 e)  $(2x - 5)x^2 - 3x(2x - 5)$       f)  $9(x - 4) + (x - 4)x + 5x(x - 4)$

**8.199** Rozłóż dane wielomiany na czynniki, wyłączając wspólny czynnik poza nawias.

- a)  $5x^2(x - 1) + 7x(1 - x) + 2(x - 1)$       b)  $-2x^2(2 - x) + 3x(x - 2) + 2(2 - x)$   
 c)  $(4x - 1)^2x + (1 - 4x)x^2 - (4x - 1)$       d)  $x(x + 5) - x^2(x + 5) - 2(-x - 5)$   
 e)  $(-1 - x)(x^2 - 1) - (x + 1)^2$       f)  $(x^2 - 9)x - (x - 3)^2$

**8.200** Zamień sumę algebraiczną na iloczyn, stosując metodę grupowania wyrazów.

- a)  $a(x + y) + bx + by$       b)  $ax + bx - ay - by$   
 c)  $cx - cy - ay + ax$       d)  $x^2 - xy + ax - ay$   
 e)  $y + 2xy - 2x - y$       f)  $3ac - bc - b + 3a$

**8.201** Rozłóż dane wielomiany na czynniki, stosując grupowanie wyrazów.

- a)  $x + 3x - 4x - 12$       b)  $7x^3 + 2x^2 - 21x - 6$   
 c)  $3x - 6x + 4x - 8$       d)  $x - x + x - 1$   
 e)  $4x + 4x - x - 1$       f)  $9x^3 - 18x^2 + x + 2$

**8.202** Rozłóż dane wielomiany na czynniki, stosując grupowanie wyrazów.

- a)  $9x - 4x^2 - 27x + 12$       b)  $5x - 4x - 5x + 4$   
 c)  $16x^3 + 16x^2 - 4x - 4$       d)  $18x^3 + 9x^2 - 18x - 9$   
 e)  $3x - 7x - 27x - 63$       f)  $10x^3 + 15x^2 - 8x + 12$

**8.203** Rozłóż dane wielomiany na czynniki, stosując grupowanie wyrazów.

- a)  $-3x^3 - 4x^2 + 12x + 16$       b)  $20x^3 + 12x^2 - 45x - 27$   
 c)  $-4x^3 + 2x - 6x + 3$       d)  $-6x^3 - 16x^2 + 3x + 8$   
 e)  $2x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 3x$       f)  $3x^3 - x^3 - 15x^2 + 5x$

**8.204** Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

- a)  $x^3 + 2x^2 - x - 2$       b)  $8x^3 + 24x^2 + 24x + 8$   
 c)  $x^4 - x^3 - 27x + 27$       d)  $125x^3 - 125x^2 - 8x + 8$   
 e)  $8x^3 - 8x^2 - x - 1$       f)  $3x^3 + 2x^2 - 24x - 16$

**8.205** Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

- a)  $(x + 2)(x + 2) - 4x - 8$       b)  $(x - 3)(x + 3) - 4x + 12$   
 c)  $2x - 14 + 5(x - 7)x^2$       d)  $3x^3 - 4x^2 - (3x + 4)^2$   
 e)  $2x + 3 - (4x + 6)(2x - 3)$       f)  $2 + x + (4 + 2x)^2$

**8.206** Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

- a)  $x^2 - 1 + (x^2 - 1)(x^2 + 1)$       b)  $3(x + 5)^3 - (x^3 + 10x + 25)$   
 c)  $(x^2 + 8x + 15)x^2 - (x + 4)^2$       d)  $4 - x^2 - (x - 2)(x + 2)(x - 3)$   
 e)  $x^3 - 8 - (x - 2)(x^2 - 3x + 1)$       f)  $(3x - 1)(2x + 5) + 2^2x - 1$

**8.207** Rozłóż dany wielomian na czynniki, wiedząc, że ma on całkowity pierwiastek.

- a)  $2x^3 + x - 5x - 2$       b)  $x - 3x - 4$   
 c)  $3x^3 - 8x^2 + 3x - 2$       d)  $x^3 - 7x^2 + 11x - 5$   
 e)  $2x^3 - x - 7x + 6$       f)  $3x - 11x - 5x - 3$

**8.208** Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

- a)  $x^3 + 4x^2 + x - 6$       b)  $2x - 4x^3 + 2x^3$   
 c)  $27 - (4x + 1)$       d)  $x - 4x - 3x - 18$   
 e)  $5x^3 + 8x^2 + x - 2x$       f)  $3x - 2x - x - 27x - 9$

**8.209** Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

- a)  $(x + 3)^3 + 4(x + 3)^2 + 4(x + 3)$       b)  $(2x - 3)^3 - 2(2x - 3)^2 + (2x - 3)$   
 c)  $(4x - 5)^3 - 9(4x - 5)$       d)  $3(x - 2)^3 - (x^3 - 4)(x - 2)$   
 e)  $(4x - 1)^3 - (3x + 2)$       f)  $(2x + 3)^3 - 8x - 12$

**8.210** Rozłóż dane wielomiany na czynniki.

- a)  $2x^3 - x - 1$       b)  $x^4 - 10x^2 - 9$   
 c)  $x^3 - 7x - 8$       d)  $(x^2 - 3x)^2 - 9x^2$   
 e)  $9x^2 - (x^2 + 2)^2$       f)  $(x + 1)^3 - 5(x + 1)^2 + 4$

**8.211** Uzasadnij, że dany wielomian nie ma pierwiastków. Następnie rozłóż ten wielomian na czynniki stopnia drugiego.

- a)  $x^4 + 1$       b)  $3x^4 - 2^2$       c)  $x^4 - x^2 + 1$       d)  $x^4 - 3x^2 + 9$



**8.212.** Dany wielomian rozłóż na czynniki.

a)  $x^6 - 1$       b)  $x^2 - 1$       c)  $256 - x^8$       d)  $x^4 - 2x^2 + 1$

**8.213.** Dany wielomian rozłóż na czynniki.

a)  $x^4(x^2 - 7)^2 - 36x$       b)  $(x^2 + 9)^2 - 16x^4$   
 c)  $x^4 + 5x^3 + 14x^2 + 22x + 12$       d)  $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 48x + 36$   
 e)  $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2$       f)  $\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}$

**8.214.** Przedstaw wielomian  $W(x)$  w postaci iloczynu dwóch wielomianów o stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych.

a)  $W(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 4x + 3$       b)  $W(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3$

## Równania wielomianowe

**8.215.** Rozwiąż równanie

a)  $x^2 - 8 = 0$       b)  $x^2 - 64 = 0$       c)  $x^2 + 1 = 0$   
 d)  $81x^4 - 1 = 0$       e)  $x^2 - 64 = 0$       f)  $x^2 - 2x^4 - 1 = 0$

**8.216.** Rozwiąż równanie

a)  $(4 - x)(x - 5)(2x - 3) = 0$       b)  $(x^2 - 4x + 1)(x^2 + 5)(8 - x^2) = 0$   
 c)  $(x - 6x + 2)(8x - 4x) = 0$       d)  $(9x^2 - 25)(125x^3 + 216) = 0$   
 e)  $(x^2 - x - 1)(3x + 12) = 0$       f)  $(x^4 - 256)(3x^2 - 6)(x^2 + 27) = 0$

**8.217.** Rozwiąż równanie

a)  $x^2(x^2 - 4) = 3(x^2 - 4)$       b)  $5(x - 3x) = x(3x - x)$   
 c)  $x^2(4 - x) + 9x - 36 = 0$       d)  $4x^2(3 - 2x) + 4x^2 = 6x$   
 e)  $(x - 1) - 2x(x - 1) + 1 = 0$       f)  $9x^2(x + 2) + 6x(x + 2) = -x - 2$

**8.218.** Rozwiąż równanie

a)  $x^2 - x^2 - x^2 - 1 = 0$       b)  $8x^2 - 12x - x - 4 = 0$   
 c)  $2x^3 + 3x^3 - 16x^3 - 24 = 0$       d)  $x^3 - x^3 - 125x^3 + 125 = 0$   
 e)  $8x^3 - 128x^3 + x^3 - 16 = 0$       f)  $27x^3 - 54x^3 - x^3 - 2 = 0$

**8.219.** Rozwiąż równanie

a)  $x^4 - 3x^2 + 4x^2 = 12x$       b)  $3x^3 - 2x^2 + 2 - 3x = 0$   
 c)  $3x^4 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$       d)  $x^4 + 4x^3 = 5x^2 + 20x$   
 e)  $x^3 - 8 = (x - 2)(x + 6)$       f)  $x^2 - 2x - (2 - x)x$

**8.220.** Rozwiąż równanie

a)  $x^4 - 12x = 0$       b)  $(x^2 + 1)(x^2 + 5) = 2x^2 + 2$   
 c)  $x^3(x - 7) = 8$       d)  $x^4 - 8 - 9x = 0$   
 e)  $(x - 1) - 81x^4 = 0$       f)  $10x^4 - 7x^3 + 1 = 0$

**8.221.** Rozwiąż równanie

a)  $4x(x^2 - 1) + (x + 1) = 0$       b)  $x - 3 + 2x(x^2 - 9) = 0$   
 c)  $x^2 - 17x - 12 = 0$       d)  $x^3 - 5x + 12 = 0$   
 e)  $4x^3 - 1 = 3x$       f)  $x^3 - 5x + 2 = 0$

**8.222.** Rozwiąż równanie

a)  $x^3 + 12x^2 + 44x + 48 = 0$       b)  $x^2 - 9x - 23x = 15$   
 c)  $7(x^2 - x^2) = 9 - 5x^2$       d)  $x(x^2 + 1) - 2(2x^2 - 3) = 0$   
 e)  $4(3x^2 + 5x - 6) = 0$       f)  $2(3x^2 + 5) = 7x(4x + 1) + x^2$

**8.223.** Rozwiąż równanie

a)  $(x^2 - 3)^2 = 4x^2$       b)  $(x^2 - 2)^2 = 36$   
 c)  $x^3 - 8(x - 1)^2 = 0$       d)  $x^4 - (3x^2 + 1)^2 = 0$   
 e)  $64x^3 + (x + 5)^2 = 0$       f)  $125x^3 = (x + 1)^3$

**8.224.** Rozwiąż równanie

a)  $x^4(x^2 - 25) = 200x - 8x^3$       b)  $2x^4 - 3x^3 - 13x = 0$   
 c)  $x^4 - 26x^3 = 27$       d)  $(x + 1)(x - 4) = x^2 + 1$   
 e)  $(2x - 1)(x^2 - 1) = 5,5(x + 1)$       f)  $x^2 - 21x - 20 = 0$

**8.225.** Rozwiąż równanie

a)  $8\sqrt{3}x^3 - 20x^2 = 2\sqrt{3}x - 5$       b)  $x^2 - 5x - 4x = 0$   
 c)  $4x - 3)(x - 4) = 3x - 12(3 - 2x)$       d)  $x(2x - 1) - (6x - 3) = 1 - 2x$   
 e)  $7x^2 = 2x^3 + 9$       f)  $3x^2 - 5x - 12x - 20 = 0$

**8.226.** Rozwiąż równanie

a)  $5x + 4x^4 = 5x + 4$

c)  $x^2 - x = 16a - 16k$

e)  $x^3 + x^4 = 2$

b)  $2(k + 1) \cdot 7k + 7k = 0$

d)  $(3k + 1, x^2 - 9) : 4(3 - k)$

f)  $x^4 = 40 - 3k$

**8.227.** Rozwiąż równanie

a)  $3x(x + 3) = 2(x^2 + 5)$

b)  $6x^2 - 13x^2 = 2 - 9x$

c)  $2x^2(x - x - 20)(x^2 - 25) = 0$

d)  $4k - 13k - 13x + 4 = 0$

e)  $5x - 7)x + 4(5x - 7) = 20x - 28x$

f)  $6k - 11x - 2k = 5 - 0$

**8.228.** Rozwiąż równania.

a)  $24k - 2x - 9x - 2 = 0$

b)  $18x^2 - 9x^2 - 2x - 1 = 0$

c)  $x - 2) - 2(x - 1) + 10 = 6x - 5x$

d)  $x + 1) - 3x = x - 1, x - 2$

e)  $x - 1) + (2x + 3)^2 = 27x - 8$

f)  $6x - 2 - 13x - 9x$

**8.229.** Rozwiąż równanie:

a)  $2x(5x^2 - 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2x(x + 1)$

b)  $2(8x^3 + 1) + 1 = 4x(7x - 1)$

c)  $x - 2)x - 2x - 4) - 12 = x - (x - 1)$

d)  $(x^2 - 2)^2 - (x - 1)^3 = 17 - x(x^2 + 3)$

e)  $(8x + 8)(x^2 - x + 1) - x - 6 = 4x^2(x + 2)$

f)  $2x^4 - 3x^2(7x - 25) = 5(23x - 10) + x^2$

**8.230.** Rozwiąż równanie:

a)  $2|x - 2| + (x - 2)^2 = 0$

b)  $|x + 1| = |2x + 2|$

c)  $(x - 3)^2 |x - 3| = 27(x - 3)$

d)  $(3k - 1) - k + 2) + 4(1 - 3k)^2 = 0$

e)  $x - 1 = x^2 + x + 1$

f)  $x^4 - 8 - 5x - 10x + 20$

**8.231.** Rozwiąż równanie

a)  $3|x - 1| + (x - 1)(x^2 + 4) = 0$

b)  $3|x + 2| = (x + 2)(x - 1)(x + 1)$

c)  $x^4 - 5 - 5x^3 + x^2$

d)  $x^4 + 13 - (13x^3 + x) = 0$

e)  $x^3 - 7x = 2 - 2x^2 - 5$

f)  $x^3 - x^2 - 3x - 2 - (2x - 1)(x + 1) = 1$

**8.232.** Jednym z rozwiązań równania  $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{Z}$ , jest liczba  $1 + \sqrt{3}$ . Oblicz  $a + b$ .

## Zadania prowadzące do równań wielomianowych

**8.233.** Liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^3 + (a - 1)x^2 + (2a + 4a - 23)x - 15$$

a) Oblicz  $a$ .

b) Rozłóż wielomian  $W(x)$  na czynniki możliwie najniższego stopnia.

**8.234.** Liczba  $2$  jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^3 + 8x^2 + (4a + 8)x + a^2 - a$$

a) Oblicz  $a$ .

b) Wyznacz pozostałe pierwiastki wielomianu  $W(x)$  podaj krotność wszystkich pierwiastków.

**8.235.** Wykaż, że jeśli suma współczynników wielomianu

$W(x) = x^3 + 2a - 6a|x + 9a - 28$  jest równa 0, to wielomian  $W(x)$  przyjmuje wartość 0 tylko wtedy, gdy  $x = 1$ .

**8.236.** Wielomian  $W(x) = x^3 + 4a(a - 1)x^2 - 3ax - 4$  jest podzielny przez dwumian  $(x - 1)$ .

a) Oblicz  $a$ .

b) Wyznacz horaz z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $(x - 1)$ .

**8.237.** Wykaż, że istnieje trzy wartości parametru  $a$  dla których reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = x^3 + x^2 + (a - a)x + 6a$  przez dwumian  $(x - 3)$  jest równa 12.

**8.238.** Iloczyn kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby o 3 od niej większe jest równy 324. Wyznacz te liczby.

**8.239.** Iloczyn trzech liczb całkowitych, których druga jest o 3 większa od pierwszej, a trzecia o 1 mniejsza od drugiej jest równy 30. Wyznacz te liczby.

**8.240.** Uczniowie pewnej klasy podzielili się na trzy wielosobowe grupy. W drugiej grupie jest o 6 osób więcej niż w pierwszej, a w trzeciej grupie jest o 10 osób więcej niż w pierwszej. Iloczyn liczby uczniów grupy drugiej i trzeciej jest o 76 większy od sześciu liczb uczniów pierwszej grupy. Ile uczniów liczy ta klasa?

**8.241.** Cyfra dziesiątek pewnej naturalnej liczby trzycyfrowej jest dwa razy większa od cyfry setek, a cyfra jedności tej liczby jest o 1 mniejsza od cyfry setek. Wyznacz tę liczbę trzycyfrową, wiedząc, że różnica sześciemu cyfry setek i iloczynu pozostałych cyfr jest równa 4.

**8.242.** Suma objętości trzech sześcianów jest równa  $73 \text{ cm}^3$ . Krawędź drugiego sześcianu jest o  $2 \text{ cm}$  dłuższa od krawędzi pierwszego sześcianu, a krawędź trzeciego sześcianu jest o  $1 \text{ cm}$  krótsza od krawędzi pierwszego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tych sześcianów.

**8.243.** Śmietaka pakowana jest w prostopadłościenny pudełko o pojemności  $0,4$ . Podstawą pudełka jest kwadrat. Wysokość pudełka jest o  $6 \text{ cm}$  krótsza od krawędzi podstawy. Wyznacz wymiary pudełka.

**8.244.** Z prostokątnego kawałka blachy o wymiarach  $0,5 \text{ m} \times 0,4 \text{ m}$  należy wyciąć we wszystkich rogach jednokątne kwadraty tak, żeby po zgięciu odpowiednich krawędzi otrzymać otwarty prostopadłościenny pojemnik. Jakiej wymiary powinny mieć wycięte kwadraty, aby objętość pojemnika była równa  $6$  litrów?

**8.245.** Akwarium ma kształt prostopadłościanu. Krawędzie jednego akwarium wychodzące z wierzchołka przy podstawie mają długość  $3 \text{ m}$ ,  $5 \text{ m}$ ,  $2 \text{ m}$ . Krawędzie drugiego akwarium są odpowiednio dłuższe o stały odcinek od krawędzi pierwszego akwarium. Wyznacz wymiary większego akwarium, wiedząc, że jego pojemność jest o  $110 \text{ m}^3$  większa od pojemności pierwszego akwarium.

**8.246.** Iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych jest równy  $192$ . Jakie to liczby?

**8.247.** Iloczyn trzech kolejnych liczb nieparzystych jest o  $65$  większy od różnicy kwadratów największej i najmniejszej z nich. Znajdź te liczby.

## Równania wielomianowe z parametrem

**8.248.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $(2x - 3)(3x - 4p)(x + 5) = 0$  ma dwa rozwiązania.

**8.249.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $(x + 3)(mx^2 + 2x + m) = 0$  ma dwa rozwiązania.

**8.250.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $(x + 3)(4x^2 + 3px + 5p - 4) = 0$  ma jedno rozwiązanie.

**8.251.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $x^2 - 3x + (4k + 2)x - (k + 2) = 0$  ma dwa rozwiązania.

**8.252.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $(2x + 3)(3 + ax + a + 1)x - 2 = 0$  ma trzy rozwiązania.

**8.253.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $(x^2 + mx + 4)(x^2 + 4x - 4m) = 0$  nie ma rozwiązań.

**8.254.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $(x^2 - x - 2)(x^2 + (m - 3)x + 1) = 0$  ma cztery rozwiązania.

**8.255.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $(k + 2)x^2 = x(2x - k - 3)$  ma trzy rozwiązania.

**8.256.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $x^4 + (m + 2)x^2 + m^2 - 4 = 0$  ma jedno rozwiązanie.

**8.257.** Wyznacz wartość parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla której równanie  $x^3 - (p + 3)x^2 - 4x = 0$  ma trzy rozwiązania, z których jedno jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

**8.258.** Wyznacz wartość parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dla którego równanie  $x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 5x - 10a = 0$  ma trzy rozwiązania, z których jedno jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

**8.259.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $x^4 - 2(p + 1)x^3 + 2p^2 - 3p - 1 = 0$  ma trzy rozwiązania, z których dwa są dodatnie.

**8.260.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $x^4 + (2k - 3)x^2 + (2k + 5)x = 0$  ma trzy rozwiązania, z których dwa są ujemne.

**8.261.** Wyznacz wartość parametru  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dla którego równanie  $x^4 + (a + 2)x^2 + a^2 - 9 = 0$  ma trzy rozwiązania.

**8.262.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $x^4 + (p - 3)x^2 + p^2 - p - 6 = 0$  ma dwa rozwiązania.

**8.263.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $x^3 + 2(k-5)x^2 + 4k^2 = 0$  ma cztery rozwiązania.

**8.264.** Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $x^4 + (2-m)x^2 - 2m + 2 = 0$  jest sprzeczne.

**8.265.** Wyznacz wartości parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , dla którego równanie  $x^4 + (m+1)x^2 + (m+3) = 0$  ma dwa rozwiązania  $x_1$  i  $x_2$  spełniające warunek  $x_1 + x_2 = 1$ .

**8.266.** Wykaż, że dla dowolnej rzeczywistej wartości parametru  $m$ , równanie  $x^3 + m^2(x-2) = 2(x^3 - x + 2)$  ma tylko jedno rozwiązanie.

**8.267.** Wyznacz wartości parametru  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , dla którego równanie  $px^3 + 2px^2 + 4px + 8 = 0$  ma dwa rozwiązania.

**8.268.** Dane jest równanie  $x^3 - px^2 + px - 1 = 0$  z parametrem  $p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . Zbadaj liczbę rozwiązań tego równania ze względu na wartość parametru  $p$ .

**8.269.** Zbadaj liczbę rozwiązań równania  $(x - 6x - 7)(mx - (m-3)x + 1) = 0$  ze względu na wartość parametru  $m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Napisz wzór i naszkicuj wykres funkcji  $g$ , która każdej liczbie rzeczywistej  $m$  przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.

## Funkcje wielomianowe

**8.270.** Funkcja wielomianowa  $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , gdzie  $a \neq 0$ , ma trzy miejsca zerowe:  $-2$ ,  $1$  i  $4$ , a dla argumentu  $1$  przyjmuje wartość  $10$ .

- Wyznacz współczynniki  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .
- Wyznacz wszystkie argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje tę samą wartość, co funkcja kwadratowa  $y = x^2 + x - 2$ .

**8.271.** Wielomian  $W(x)$  jest trzeciego stopnia, ma dwa pierwiastki:  $-3$  i  $1$ , przy czym liczba  $1$  jest pierwiastkiem dwukrotnym. Funkcja  $y = W(x)$  dla argumentu  $4$  przyjmuje wartość  $50$ .

- Napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.
- Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcje  $y = W(x)$  oraz  $y = 8|x + 3|$  przyjmują tę samą wartość.

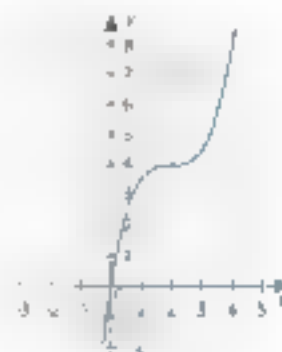
**8.272.** Wielomian  $W(x)$ , czwartego stopnia, ma dwa pierwiastki:  $2 - \frac{1}{2}$  i  $\frac{1}{2}$ , przy czym

liczba  $2$  jest pierwiastkiem trzykrotnym. Funkcja  $y = W(x)$  dla argumentu  $3$  przyjmuje wartość  $15$ .

- Napisz wzór funkcji wielomianowej w postaci uporządkowanej.
- Podaj miejsca zerowe funkcji, określonej wzorem  $y = W(x+4)$ .

**8.273.** Wykres funkcji  $y = ax^3$ , gdzie  $a \neq 0$ , przesunięto równoległe o wektor  $[2, 4]$  i otrzymano wykres funkcji  $y = W(x)$ , którego fragment jest przedstawiony na rysunku obok. Wiadomo, że do otrzymanego wykresu należy punkt  $(0, 0)$ .

- Oblicz  $a$ .
- Napisz wzór funkcji  $y = W(x)$  w postaci uporządkowanej.
- Naszkicuj wykres funkcji  $y = W(|x|)$ .



**8.274.** Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = W(x)$ , do którego należą punkty  $A(1, 3)$ ,  $B(3, 3)$  oraz punkt  $(0, 0)$ . Wiadomo, że st.  $W(x) = 3$  oraz współczynnik przy najwyższej potęgze zmiennej  $x$  jest równy  $1$ .

- Napisz wzór funkcji wielomianowej w postaci uporządkowanej.
- Oblicz współrzędne punktów wspólnych wykresu tej funkcji i prostej o równaniu  $4x - y - 9 = 0$ .



**8.275.** Wykres funkcji  $y = \frac{1}{4}x^2$  przesunięto równoległe o wektor  $[-1, 4]$  i otrzymano wykres funkcji  $y = W(x)$ .

- Napisz wzór funkcji  $y = W(x)$  w postaci iloczynowej.
- Podaj miejsca zerowe tej funkcji.

8.276. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = W(x)$ , która ma dwa miejsca zerowe:  $\frac{1}{2}$  oraz 2. Do wykresu tej

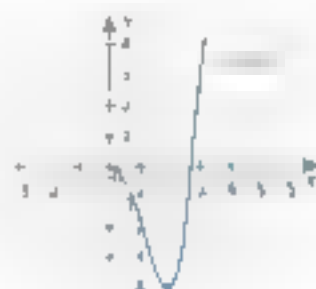
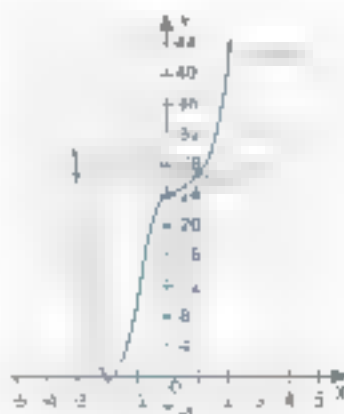
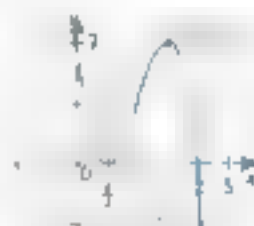
funkcji należy punkt  $A\left(1\frac{1}{2}, 2\right)$  oraz st.  $W(x) = 3$ .

- Napisz wzór funkcji  $y = W(x)$  w postaci uporządkowanej.
- Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = 4x^2 - 5x + 3$ .

8.277. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = W(x)$ , której jedynym miejscem zerowym jest liczba -2. Do wykresu tej funkcji należą punkty:  $A(-3, 27)$ ,  $B(1, 27)$  oraz  $(0, 24)$ . Wiedząc, że st.  $W(x) = 4$ , napisz wzór funkcji w postaci uporządkowanej.

8.278. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = W(x)$ , do którego należą punkty  $(2, -4)$  i  $(0, 0)$ . Funkcja ta jest parzysta, a jednym z jej miejsc zerowych jest liczba  $2\sqrt{2}$ . Uzupełnij jej wykres dla  $x < 0$ . Wiedząc, że st.  $W(x) = 4$ :

- Napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.
- Rozwiąż równanie  $W(x) = -3$ .



8.279. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = W(x)$ , do którego należy punkt  $A\left(3, 16\frac{2}{3}\right)$ . Funkcja ma dwa miejsca zerowe:

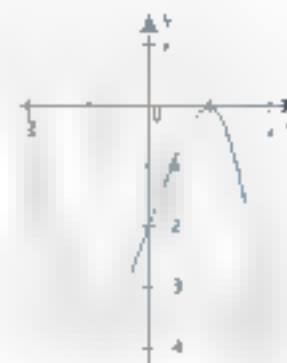
$-2$  i  $1$  oraz st.  $W(x) = 3$ .

- Odczytaj z wykresu zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości ujemne.
- Napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.
- Dla jakich argumentów funkcja  $W$  oraz funkcja liniowa  $y = -\frac{2}{3}x - 1\frac{1}{3}$  przyjmują tę samą wartość?



8.280. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = W(x)$ , gdzie st.  $W(x) = 3$ . Funkcja ta ma dwa miejsca zerowe  $-2$  i  $1$ , a dla argumentu  $-3$  przyjmuje wartość 16.

- Napisz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.
- Podaj zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne.
- Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji  $y = W(x)$  i wykresu funkcji kwadratowej  $f(x) = 2x^2 - 5x - 20$ .



8.281. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = W(x)$ , gdzie st.  $W(x) = 4$ . Funkcja  $W$  ma dwa miejsca zerowe:  $0$  i  $2$ , a dla argumentu  $-2$  przyjmuje wartość  $-16$ .

- Napisz wzór tej funkcji w postaci uporządkowanej.
- Wyznacz wzór funkcji  $G$ , której wykres otrzymamy przesuwając równolegle wykres funkcji  $W$  o wektor  $\begin{bmatrix} 1, 9 \end{bmatrix}$ . Zapisz ten wzór w postaci iloczynowej.

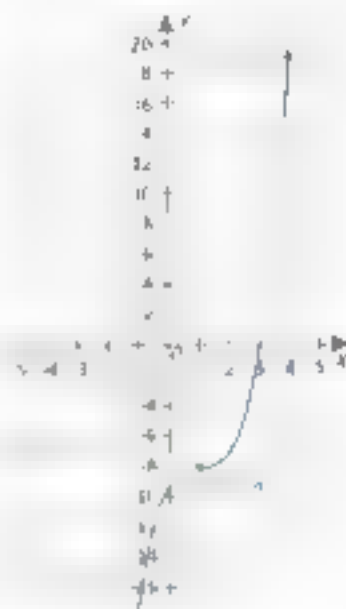




**8.282.** Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = W(x)$ , do którego należą punkty  $A(4, 19)$ ,  $B(1, -8)$  oraz  $C(-1, -16)$ . Funkcja ma jedno miejsce zerowe równe 3 oraz  $\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = 3$ .

a) Napisz wzór tej funkcji.

b) Wykaż, że przekształcając ten wykres przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych, otrzymamy wykres funkcji  $G(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$ .



## Nierówności wielomianowe

**8.283.** Rozwiąż nierówność:

- a)  $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$       b)  $(2x-4)(5-x)(x-2)(x^2+1) \leq 0$   
 c)  $(x+3)(x+2)^2(x-1)^2 < 0$       d)  $(1-x)^5(x+2)^2(x^2-4)(x^3-1) \geq 0$   
 e)  $x^2(4-x)(x+2)^2 \geq 0$       f)  $x^2(-2-x)^2(x-3)^2 < 0$

**8.284.** Rozwiąż nierówność:

- a)  $(4x^2+4x+1)(2x^2-5x-3)(3-x) < 0$   
 b)  $(3x-x^2)(-2-2x-x)(x+3) > 0$   
 c)  $(27-x^3)(x+2)^4(5-x)^2 > 0$   
 d)  $(x^2-x-6)^4(x^2-6x+9)(x^2+4) > 0$   
 e)  $(2-x)(x^2-7x+6) < 0$   
 f)  $(4-x)(x^2-13x+12) \geq 0$

**8.285.** Rozwiąż nierówność:

- a)  $x^4 + 8x^2 - 2x^2 \leq 0$       b)  $x^2 - 3x - 9 \leq 3x$   
 c)  $2x^2 - 7x^2 - 2x + 7 < 0$       d)  $3x^2 - 45 + 5x \leq 27x$   
 e)  $4x^2 + 8x^2 \leq 11x - 3$       f)  $2x^2 - 9x^2 \geq 5 - 12x$

**8.286.** Rozwiąż nierówność:

- a)  $x^3 - x^2 < 14x - 24$       b)  $x^2(x-9) > 15(1-2x) + 7x$   
 c)  $2x^3 - 32x \leq 3x^2 - 48$       d)  $18x - 5x^2 \geq 2x^3 - 45$   
 e)  $27(x+1) \leq 4x^3$       f)  $4x^2 - 7x + 3 \leq 0$

**8.287.** Rozwiąż nierówność:

- a)  $4x + 3 \leq 2x^3 + x^2$       b)  $3x + 20 < 7x^2 + 8x$   
 c)  $21x + x^4 + 9x - 30 \leq x$       d)  $9x^3 + 3x^2 \leq 5x - 1$   
 e)  $(x^2 - 1)^2 - 6(x^2 - 1) + 5 \geq 0$       f)  $(x^2 - 5)^2 - 4(x^2 - 5) - 5 < 0$

**8.288.** Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$ , jeśli:

- a)  $f(x) = \sqrt{9x^4 + 12x^2 + 4x^2}$       b)  $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2}$   
 c)  $f(x) = \sqrt{4 + 6x - 2x^2}$       d)  $f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2 - 12x + 4}$

**8.289.** Rozwiąż nierówność:

- a)  $9|x|^3 - |x| \leq 0$       b)  $|x+1|^2 - 3|x+1| + 2 < 0$   
 c)  $|x-3| + 2 < x^2 - 3x - 2$       d)  $|x-4x-x^2-4x| < 4x$   
 e)  $(x^2-9)(x^2-25) > 0$       f)  $|x^2-1|(x^2-4) \leq 0$

**8.290.** Rozwiąż nierówność:

- a)  $|x-2|^2 - 9|x-2| \geq 0$       b)  $|x+1|^2 < 25|x+1|$   
 c)  $|x^2+3x+2| > 2$       d)  $|x^3+6x^2-16x-48| < 48$   
 e)  $|x^2+8| \leq 3x^2-6x+12$       f)  $|x^3-125| > 2x^2+10x+50$

**8.291.** Rozwiąż nierówność:

- a)  $3x - x - 4x$       b)  $x - 6x - x$   
 c)  $x^4 - 3x^2 \leq |x^4 - 3|$       d)  $|x^3 + 2x^2| < 9x + 18$   
 e)  $|x^3 - 2x^2| \geq 3x^2$       f)  $|x^2 - 1| \geq x^2 - x$

**8.292.** Wykaż, że  $2(x^4 - x^2 - 2y) + y^2 + 6 > 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$  i  $y \in \mathbb{R}$ .

**8.293.** Wykaż, że  $x^5 - 6x^3 + 17x^2 - 10x + 26 > 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .

**8.294.** Wykaż, że jeśli  $x \in (-\infty, -2)$ , to  $x^2 + 8 > (2x^2 + x + 15)(x + 2)$ .

**8.295.** Wykaż, że jeśli  $a \leq 0$  i  $b \leq 0$ , to  $8a^3 + 27b^3 \leq 6ab(2a + 3b)$ .

D 8.296. Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste  $x$  i  $y$  są ujemne, to  $27x^3 + 8y^3 < [4x^2 \cdot 1 - 2y(4x - y)] \cdot (2y + 3x)$ .

D 8.297. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest zależność  $x^4 + 3x^3 + x + 3 \geq 2x^2 - 6x$ .

D 8.298. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest zależność  $x^4 + 2x^3 - 6x + 9 \geq 5x^2$ .

### Test sprawdzający do rozdziału 8

1. Wyrażenie  $(-3 - 2x)(4x^2 + 1 - 2x)$  jest równe:

- A.  $1 + 8x^3$       B.  $8x^3 - 1$       C.  $8x^3 + 1$       D.  $1 - 8x^3$

2. Wielomian  $W(x) = x^3 + ax^2 + 4ax - 5$  dla  $x = -1$  przyjmuje wartość 0. Wobec tego:

- A.  $a = -2$       B.  $a = 1$       C.  $a = 1$       D.  $a = 2$

3. Suma wszystkich współczynników wielomianu  $W(x) = (3x^4 - 2x^3 + 1)^7$  jest równa:

- A.  $-2$       B.  $2$       C.  $-128$       D.  $128$

4. Jeśli  $P(x) = x + 3$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$  to wielomian  $W(x) = P(x) \cdot (x^2 - x - 6)$  ma trzy pierwiastki.

- A.  $-3, -1, 6$       B.  $-3, -2, 3$       C.  $-6, -3, 1$       D.  $-3, 2, 3$

5. Jeśli wielomiany  $W(x) = (x - a)(2x - 3)$  oraz  $P(x) = 2x^2 + 4x + 3x - b$  są równe, to:

- A.  $a + b = -1$       B.  $a + b = 0$       C.  $a + b = 2$       D.  $a + b = 4$

6. Sześcian liczby  $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4}$  jest równy:

- A. 6      B.  $(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4})^3 \cdot (\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4})^2$   
C.  $6 + \sqrt[4]{16}$       D.  $6(1 + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4})$

7. Jeśli  $P(x) = (x - 3)^3$  oraz  $Q(x) = (x - 3x + 9)(x + 3) + 9x^2$  to stopeń wielomianu  $P(x) + Q(x)$  jest równy:

- A. 3      B. 2      C. 1      D. 0

8. Wielomian  $W(x) = x^3 - 3x^2 - 8$  jest podzielny przez dwumian:

- A.  $x - 8$       B.  $x + 2$       C.  $x - 2$       D.  $x + 4$

9. Wielomian  $W(x) = (2x - 1)(3 - x)(2x + 1)$  nie jest podzielny przez wielomian:

- A.  $3 + 5x - 2x^2$       B.  $1 - 4x$       C.  $2x + 7x - 3$       D.  $4x - 4x + 1$

10. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = 2(x^3 - 3x - 1) - (5 - 2x)^2$  przez dwumian  $x + 1$  jest równa:

- A. 1      B.  $-7$       C. 6      D.  $-5$

11. Ilorazem z podzielenia wielomianu  $2x^3 - 3x - 4$  przez dwumian  $x - 2$  jest wielomian:

- A.  $2x^2 + x - 2$       B.  $2x^2 + x - 2$       C.  $2x^2 - 2$       D.  $2x^2 - x - 2$

12. Wyrażenie  $5x^5 - 5x^2$  po rozłożeniu na czynniki przyjmuje postać:

- A.  $5(x^2 - x^3 - x - x)$       B.  $5x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$   
C.  $x^2(x - 1)(5x^2 + 5x + 5)$       D.  $5x^2(x - 1)(x + 1)^2$

13. Liczba pierwiastków wielomianu  $(3x - 4)(2x^2 + x + 1)(8x^2 + 125)$  jest równa:

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 7

14. Iloczyn rozwiązań równania  $2x(x - 4) = (x + 4)(x^2 - 3)$  wynosi:

- A. 0      B. 3      C. 12      D. 12

15. Które z podanych równań jest sprzeczne?

- A.  $(x - 3) - 5(x - 3)$       B.  $x - 3 = 4x$   
C.  $2x + \dots = 0$       D.  $(x - 1) = 27$

## Zadania powtórzeniowe do rozdziału 8.

16. Dane są wielomiany  $W(x) = x^3 - 2x^2 - 4(2 - x)$  oraz  $G(x) = (x - 1)(2x + 1)$ . Zapisz wielomian  $F(x) = W(x) \cdot G(x) - 4(1 - x)(2x + 1)$  w postaci uporządkowanej i pierwiastków ma wielomian  $F(x)$ ?

17. Sprawdź, czy istnieją liczby  $a$  i  $b$ , dla których wielomiany  $W(x) = x^3 + a^2x^2 - 3x + a$  oraz  $F(x) = x^3 + 4x^2 + (a + b)x + b - 1$  są równe.

18. Usuń niewymierność z mianownika ułamka

a)  $\frac{1}{2\sqrt{5} - 1}$       b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 9}$

19. Wielomian  $W(x)$  rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia. Następnie podaj jego pierwiastki.

a)  $W(x) = x^3 + 25x^2 + x^2 - 25$       b)  $W(x) = x^3 - 31x^2 + 30x$

20. Wielomian  $W(x) = a(x^2 - 1)(x + 3)$ , gdzie  $a \neq 0$ , dla liczby 3 przyjmuje wartość 96.

- a) Oblicz  $a$ .  
b) Wyznacz pierwiastki wielomianu  $F(x) = W(x) - 10(x + 1)$ .

21. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = x^3 + (a^2 - 2)x^2 + 2a^2x - a + 5$  przez dwumian  $x - 1$  jest równa 6. Oblicz  $a$ .

22. Wielomian  $W(x) = 2x^3 + (b - a)x^2 + (3a - b)x - a - 2b$  jest podzielny przez dwumian  $x - 3$ , natomiast reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x + 1$  jest równa 12.

- a) Oblicz  $a$  i  $b$ .  
b) Wyznacz całkowite pierwiastki wielomianu  $W(x)$ .

23. Rozwiąż równanie:

a)  $(2x - 5)^2 - 8 = 0$       b)  $4x^4 + 35x^2 - 9 = 0$   
c)  $x^4 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$       d)  $3x^4 + 10x^3 + 9x^2 = 2$

24. W trzycyfrowej liczbie nieparzystej podzielnej przez 5 cyfra dziesiątek jest o 2 mniejsza od cyfry setek. Wyznacz tę liczbę wiedząc, że szóstka cyfry dziesiątek jest o 12 mniejszy od iloczynu pozostałych cyfr.

25. Wielomian  $W(x)$  jest trzeciego stopnia, ma trzy całkowite pierwiastki, z których jeden jest równy  $-2$ , a drugi  $4$ . Reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian  $x + 1$  jest równa  $-10$ . Wiedząc, że suma wszystkich współczynników tego wielomianu wynosi  $0$ , wyznacz wzór wielomianu  $W(x)$ .

- a) w postaci iloczynu dwumianów stopnia pierwszego,  
b) w postaci uporządkowanej malejąco.

D 26. Wykaż, że wielomian  $W(x) = (2x^{10} + 3x)^{11} - 1$  jest podzielny przez dwumian  $(x + 1)$  i nie jest podzielny przez dwumian  $(x - 1)$ .

D 27. Wykaż, że jeśli  $x - y = 5$  oraz  $x \cdot y = 1$ , to  $x^3 - y^3 = 140$ .

D 28. Wykaż, że liczba:

- a)  $5^{18} - 7^{12}$  jest podzielna przez 19  
b)  $5^{31} - 3^{17}$  jest podzielna przez 61

D 29. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej nieparzystej  $x$  liczba  $3x^3 + 9x^2 - x - 3$  jest podzielna przez 4.

D 30. Wykaż, że suma sześciu trzecich kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 4 jest podzielna przez 4.

D 31. Wykaż, że  $a^4 \leq \frac{1 + 4a^2}{4}$ .

D 32. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  różnej od zera, wartość wyrażenia  $(a - 1)^2(a + 1)^2 - a(1 - 2a)^2 - 12a^3 - a$  jest ujemna.

D 33. Wykaż, że  $(x + 3)^3 - (x - 1)^3 > 16$  dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ .

34. Dany jest wielomian  $W(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$ .

- a) Wyznacz liczbę i resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^2 - 3x + 4$ .  
b) Zapisz wielomian  $W(x)$  w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego.

35. Wielomian  $W(x) = x^3 - 3x^2 + 3x^2 - ax + 2$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = x^2 - 3x + b$ . Oblicz  $a$  i  $b$ .

36. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = 2x^2 + 3x - 8x + 3$  jest równa  $R(x) = x^2 + 5x + 1$ . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $F(x) = (x - 1)(x + 3)$ .

37. Wyznacz wymierne pierwiastki wielomianu:

a)  $W(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1$       b)  $W(x) = 2x^3 - 4x^2 + x^2 + x - \frac{3}{8}$

38. Wielomian  $W(x) = x^3 - (m+1)x^2 + (m-3)x - 3$ , gdzie  $m \in \mathbb{Z}$  ma trzy całkowite pierwiastki. Oblicz  $m$ .

D 39. Wykaz, że wielomian  $W(x) = 16x^4 - 16x^3 + 4x - 1$  ma trzykrotny pierwiastek

40. Rozwiąż nierówność

a)  $(3-x)(x^3 - 3x^2 + 2x - 6) < 0$       b)  $|x^3 - 21x + 10| \geq 10$ .

41. Wielomian  $W(x)$  jest trzeciego stopnia i ma dwa pierwiastki: 1 oraz 1, przy czym 1 jest pierwiastkiem dwukrotnym. Wykres funkcji wielomianowej,  $y = W(x)$  przecina oś  $OY$  w punkcie o rzędnej 2.

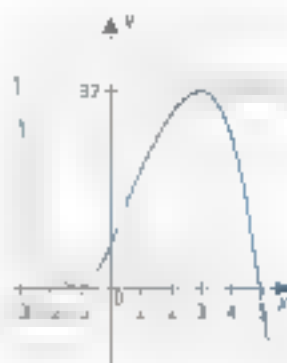
a) Napisz wzór funkcji  $y = W(x)$  w postaci uporządkowanej.

b) Rozwiąż nierówność  $W(x) \geq 4x^3 - 5x^2 - 2x + 3$ .

42. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = W(x)$ , gdzie st.  $W(x) = 3$ . Funkcja ta ma dwa miejsca zerowe: 5 oraz -2, a dla argumentu 3 przyjmuje wartość 32.

a) Napisz wzór tej funkcji w postaci iloczynu czynników stopnia pierwszego.

b) Wyznacz argumenty, dla których funkcja  $y = W(x)$  przyjmuje wartość mniejszą niż funkcja  $f(x) = -x^2 + 13x + 5$ .



43. Wielomian  $W(x) = x^3 + px^2 + qx - 24$  ma trzy pierwiastki  $x_1, x_2, x_3$ , które spełniają zależność  $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 14$ . Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x + 2$  jest równa -40.

a) Wyznacz  $p$  i  $q$ .

b) Oblicz wartość wyrażenia  $x_2 x_3 x_3 - 5(x_1 + x_2 + x_3)$ .

D 44. Dany jest wielomian  $W(x) = x^3 + ax^2 + 7x - 15$  gdzie  $a \in \mathbb{Z}$ . Wykaz, że jeśli wielomian  $W(x)$  ma pierwiastek będący liczbą pierwszą, to suma wszystkich jego pierwiastków też jest liczbą pierwszą.

D 45. Reszta z dzielenia liczby całkowitej dodatniej  $p$  przez 3 jest równa 2. Wykaz, że reszta z dzielenia liczby  $2^p$  przez 7 jest równa 4.

D 46. Wykaz, że dla dowolnej liczby całkowitej  $k$  liczba  $k^2 - 6k + 11k - 6$  jest podzielna przez 6.

D 47. Wykaz, że liczba  $\sqrt[3]{37 + 10\sqrt{117}} + \sqrt[3]{37 - 10\sqrt{117}}$  jest naturalna.

48. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m, m \in \mathbb{R}$  dla których równanie  $x^4 + (m-1)x^2 + m^2 + 4m + 5 = 0$  ma tylko dwa rozwiązania.

49. Dany jest wielomian  $W(x) = (x-2)(x^2 - 2mx + 1 - m^2)$  z parametrem  $m$ , gdzie  $m \in \mathbb{R}$ .

a) Dla  $m = 1$  rozwiąż nierówność  $W(x) \geq (4 - x^2)$ .

b) Wyznacz wszystkie wartości  $m$  dla których wielomian  $W(x)$  ma trzy pierwiastki.

50. Ustal liczbę rozwiązań równania  $(x+3)(mx^2 + 2mx - 3) = 0$  z niewiadomą  $x$  ze względu na wartość parametru  $m, m \in \mathbb{R}$ .

# Odpowiedzi do zadań

## 2. Przekształcenia wykresów funkcji

Wektor w układzie współrzędnych – podstawowe informacje

1.2.  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.3. a)  $AB = 6$ , b)  $AB = 7\sqrt{3}$ , c)  $AB = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ , d)  $AB = \frac{9}{2}$

1.4.  $AB = 1$ ,  $CA = 2$ ,  $BC = 5$ ,  $BA = 3$ ,  $AC = 2$ ,  $CB = 5$

1.5. a) 13, b)  $7\frac{1}{2}$ , c) 51, d) 3

1.6. a)  $AB = \sqrt{13}$ , b)  $AB = \sqrt{5}$ , c)  $AB = 25$ , d)  $AB = 3\sqrt{13}$

1.7. a)  $B(3, 9)$ , b)  $B(-1, 13)$ , c)  $B(4, -9)$ , d)  $B(4\sqrt{2}, \sqrt{2})$

1.8. a)  $A(5, 7)$ , b)  $A(5, -1)$ , c)  $A(\frac{1}{5}, \frac{1}{6})$ , d)  $A(\sqrt{3}, 5)$

1.9. wektory równe:  $\vec{AB}$  i  $\vec{CE}$ , pary wektorów przeciwnych:  $\vec{AB}$  i  $\vec{AD}$ ,  $\vec{CE}$  i  $\vec{AD}$  oraz  $\vec{AE}$  i  $\vec{D}$

1.10. a)  $P(1, 4)$ , b)  $P(-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$

1.11. a)  $> 1$ , b)  $< 1$ , c)  $< 1$ , d)  $< 1$

1.12. a)  $B(4, -4)$ , b)  $B(-4, 4)$ , c)  $B(0, 2)$ , d)  $B(-8, 3)$

1.13. a)  $A(7, 5)$ , b)  $A(4, 6)$

1.14. wektory  $\vec{CA}$  i  $\vec{BD}$  są przeciwnymi, wykaz że trójkąty  $ACB$  i  $COB$  są przystające

1.15. a)  $FS$ ,  $SC$ ,  $ED$

1.16.  $AB = \sqrt{82}$ ,  $AC = 5\sqrt{2}$ ,  $BC = 4\sqrt{2}$ , trójkąt jest prostokątny

1.17. a)  $\sqrt{58}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{37}$ , b)  $\frac{\sqrt{89}}{2}$

1.18. a) tak,  $8\sqrt{5}$ , b) nie,  $12\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$

1.19. a)  $D(-2, 2)$ , b)  $S(-0,5, 2)$ , c)  $|AC| = \sqrt{61}$ ,  $|BC| = 3$

1.20.  $C(2, 2)$ ,  $D(0, 7)$ ,  $|AB| = |CD| = \sqrt{29}$ ,  $|BC| = |AD| = 5$

1.21.  $B(3, -4)$ ,  $|AB| = 10$

1.22. a)  $m = 1$ ,  $n = -2$ , b)  $m = -3$ ,  $n = 2\frac{1}{4}$ , c)  $m = 2$ ,  $n = -2$ , d)  $m = 0$ ,  $n = -6$

1.23.  $EF = \frac{1}{2}AB + AD$

1.24. a)  $\vec{PD} = 2\vec{a} + \vec{b}$ , b)  $\vec{AD} = 2\vec{b} + 2\vec{a}$ , c)  $DB = 2a + a$

1.25. a)  $[5, 3]$ , b)  $[4, -3]$ , c)  $[10, 6]$ , d)  $[-10, -6]$ , e)  $[-2, 5]$ ,  $[-1, 5]$

1.26. a)  $[-4, -2]$ , b)  $[5, -22\frac{1}{2}]$ , c)  $[0, 0]$ , d)  $[-10, -37]$

1.30.  $D(9, 7)$

1.31.  $k = 3$ ,  $4$

1.32. a)  $x = 2$ , b)  $x = 3$ , c)  $x = 6$ , d)  $x = 2$

e)  $\vec{r} = [19, 3]$

Przesunięcie równoległe Przesunięcie równoległe wzdłuż osi  $Ox$

1.33. a)  $A(1, 2)$ , b)  $A(3, 5)$ , c)  $A(5, 10)$

1.34. a)  $B(6, 2)$ , b)  $B(10, 3)$ , c)  $B(1, -5)$

1.35. a)  $h(x) = f(x + 3)$ , b)  $h(x) = f(x - 2)$

$x$	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	0	1	2	0	1	2

$x$	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	0	1	2	0	1	2

1.36. a)  $\vec{u} = [4, 0]$ , b)  $\vec{u} = [-5, 0]$ , c)  $\vec{u} = [5, 0]$ , d)  $\vec{u} = [10, 0]$

1.37. a) 4 jednostki w prawo,  $\vec{u} = [4, 0]$ , b) 6 jednostek w lewo,  $\vec{u} = [-6, 0]$

1.38. a) 6 jednostki w prawo,  $\vec{u} = [6, 0]$ , b) 8 jednostek w lewo,  $\vec{u} = [-8, 0]$

1.39. a) 2, b) 6

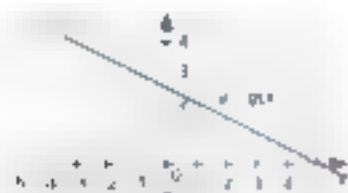
1.40. a) 2, b) 6

1.41. a)  $g(x) = 3x + 3$ , b)  $g(x) = 3x + 3$





$$\text{c) } g(x) = \frac{1}{2}x - 5; \quad \frac{1}{2}x - 2.5; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{d) } g(x) = x + 1; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\text{e) } g(x) = (x - 1); \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } g(x) = \frac{1}{3}x - 3; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$1.42. \quad \text{a) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \vec{u} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{e) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{f) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1.43. \quad \text{a) } g(1) = 4; \quad \text{b) funkcja } g \text{ jest malejąca w przedziale } (-\infty, 3) \text{ rosnąca w przedziale } (3, +\infty)$$

$$1.44. \quad \text{a) } D = (-2, +\infty); \quad \text{b) } 2$$

$$1.45. \quad \text{a) } D_g = \mathbb{R}; \quad \text{b) } (0, 1); \quad \text{c) } (-\infty, 1); \quad \text{d) } (1, +\infty)$$

$$1.46. \quad \text{a) } g(x) = (x + 2)$$

$$1.47. \quad \text{a) } D_g = [1, 7]; \quad \text{b) funkcja } g \text{ jest malejąca w przedziale } [1, 4] \text{ rosnąca w przedziale } [4, 7]$$

$$1.48. \quad \text{a) } D_g = [2017, 2002]$$

$$1.49. \quad \text{miejsc zerowe: } -12, -8, -2; \text{ zbiór wartości: } \{-3, 5\}$$

$$1.50. \quad \text{c) } (5, 10), (10, 11), (11, 5)$$

$$1.51. \quad \text{a) } g(x) = x^2 - 10x + 26; \quad \text{b) } g(x) = 2x + 5$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 - x - 2; \quad \text{d) } g(x) = (x - 3)(x - 9)$$

## Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OY

$$1.53. \quad \text{a) } h(x) = f(x) + 2; \quad \text{b) } h(x) = f(x) - 7$$

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$h(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

$$1.55. \quad \text{a) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$1.56. \quad \text{a) o 4 jednostki do dołu; } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) o 7 jednostek do góry; } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) o 8 jednostek do góry; } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad \text{d) o 3 jednostki do dołu; } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$1.57. \quad -45$$

$$1.58. \quad 8$$

$$1.59. \quad \text{dla funkcji } f: (0, 2); \text{ miejsc zerowe: } 3; \quad \text{dla funkcji } g: (0, 4); \text{ brak miejsc zerowych}$$

$$\text{dla funkcji } h: (0, -3); \text{ brak miejsc zerowych}$$

$$1.60. \quad \text{a) } g(x) = -2x + 6; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } g(x) = \sqrt{x} - 3; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } g(x) = 3x^2 - 7; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } g(x) = x^2 - 4; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } g(x) = \frac{4}{x} - 2; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \text{f) } g(x) = \frac{1}{5}x + 3; \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$1.62. \quad \text{a) } 0.5; \quad \text{b) } ZW_g = \mathbb{R}; \quad \text{c) funkcja jest malejąca w przedziałach } (-\infty, 0) \text{ i } (0, +\infty)$$

$$1.63. \quad \text{a) } -1, 1; \quad \text{b) } ZW_g = (-1, +\infty); \quad \text{c) } (-\infty, 0)$$

$$1.64. \quad \text{a) } 4; \quad \text{b) } 5; \quad \text{c) } (3, 5)$$

$$1.65. \quad \text{a) } g(x) = x - 4; \quad \text{c) najmniejsza wartość funkcji } f: 0; \text{ najmniejsza wartość funkcji } g: -3$$

$$1.66. \quad \text{a) } D_g = [1, 2]; \quad ZW = [2, 7]; \quad \text{b) } 0 - x$$

$$1.67. \quad \text{a) } -6; \quad \text{b) } -1; \quad \text{c) } 234; \quad \text{d) } 235$$

$$1.68. \quad \text{a) } 3; \quad \text{b) } 9; \quad \text{c) } 12; \quad \text{d) } 9$$

$$1.69. \quad \text{c) } g(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$1.70. \quad \text{a) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \text{nie}$$

$$1.71. \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1.72. \quad \text{a)}$$

$x$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$g(x)$	0	6	13	20	27	34	41	48	55

$$1.73. \quad \text{a) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \vec{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \text{e) } \vec{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 10 \end{bmatrix}$$

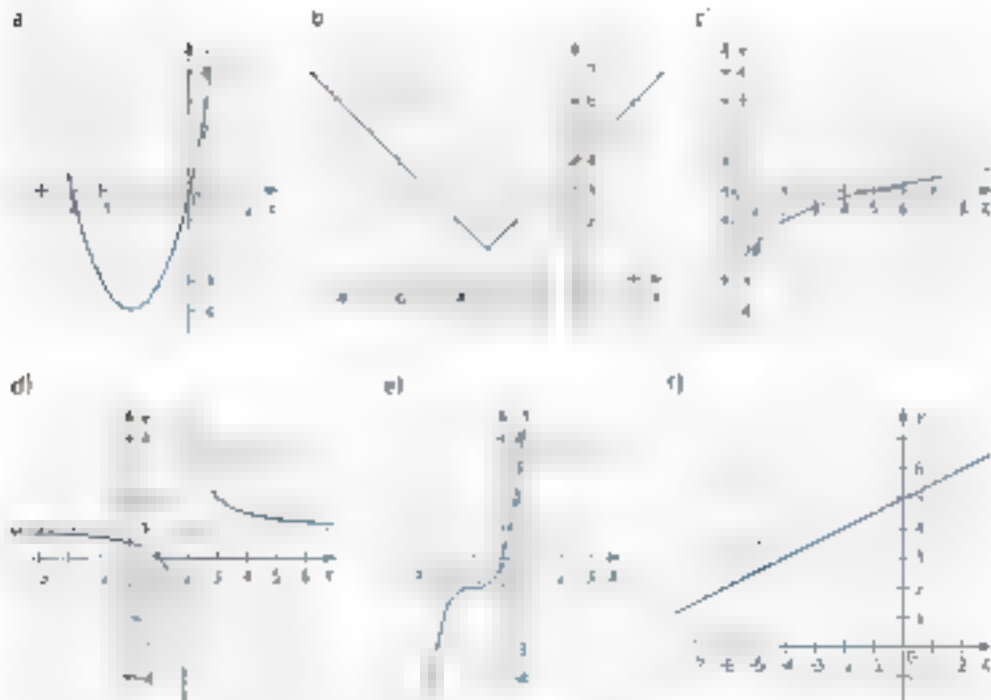
$$\text{f) } \vec{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$1.74. \quad \text{a) } g(x) = \sqrt{x} - 1; \quad \text{b) } g(x) = x + 2; \quad \text{c) } g(x) = x^2 - 4; \quad \text{d) } g(x) = \frac{1}{x} - 3$$

$$1.75. \quad \text{a) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \vec{u} = \begin{bmatrix} -20 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \text{e) } \vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

1.76



1.77 a) funkcja  $g$  jest rosnąca w przedziałach  $[-9, -5]$  i  $[2, 3]$  malejąca w przedziale  $[-5, 2]$  b) dla  $x = -5$  funkcja  $g$  przyjmuje wartość największą, równą 7 dla  $x = 2$  funkcja  $g$  przyjmuje wartość najmniejszą, równą 1 c) 24

1.78 a)  $D_g = \mathbb{R}$   $ZW_g = [-2, 3]$  b)  $D_g = [-5, 5]$   $ZW_g = [-9, 1]$  c)  $D_g = \mathbb{R}$   $ZW_g = [-7, +\infty)$  d)  $D_g = (-5, 4]$   $ZW_g = [-1, +\infty)$

1.79 a)  $g(x) = x^2 + 7x + 10$  b)  $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$  c)  $g(x) = 3x$   $h(x) = 4$   
d)  $g(x) = 2x - 8x + 13$

Symetria osiowa, Symetria osiowa względem osi  $OX$  i  $OY$

1.80 1) a) dwie b) trzy c) jedną d) cztery e) pięć f) nieskończenie wiele

1.81 a)  $x_1 = 1$   $x_2 = 6$   $ZW_g = 1$  b)  $D_g = [1, 7]$   $ZW_g = (3, 3)$   
c)  $D_g = [5, 6]$   $ZW_g = 4$  d)  $D_g = [5, 5]$   $ZW_g = 4$  e)  $x = 2$   $y = 3$

1.84 a)  $g(x) = 3x + 2$  b)  $g(x) = 5x + 8$  c)  $g(x) = 8$  d)  $g(x) = x + 1$   
e)  $g(x) = x + 15$  f)  $g(x) = x + 7$

1.85 a)  $g(x) = 4$  b)  $g(1) = 3$  c)  $g(x) = x$  d)  $g(x) = x^2 + x$   $g(x) = x + 2$   
e)  $g(x) = x + 1$

1.86 a)  $D_g = [-4, 3]$   $ZW_g = 5$  b)  $D_g = \mathbb{R}$   $ZW_g = [-1, 4]$

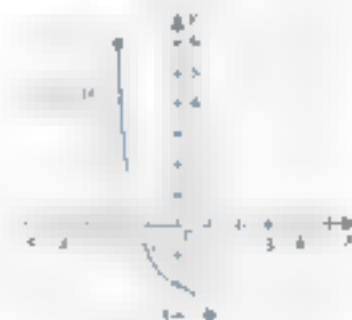
1.87

$$a) \begin{cases} x + 7 \leq 2 \\ x + 5 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

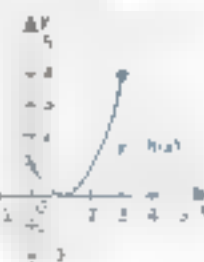
1.88 a)  $D_g = [-4, 5]$   $ZW_g = (-2, 4)$  b)  $D_g = [1, 1] \cup (0, 5]$   $ZW_g = (-2, 5)$

c)  $D_g = [-4, 3]$   $ZW_g = (0, 4)$  d)  $D_g = [3, 5]$   $ZW_g = (-3, 4)$

1.89 a)  $h(x) = -x + 2$  gdzie  $x \in (-2, 4)$  b)  $h(x) = x^2 - 7$  gdzie  $x \in \mathbb{R}$



c)  $h(x) = x - x^2$  gdzie  $x \in [1, 3]$



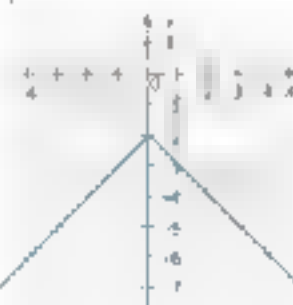
1.90 a)  $g(x) = 5x + 4$   $D_g = \mathbb{R}$  b)  $g(x) = x + 2$   $D_g = \mathbb{R}$  c)  $g(x) = 3x$   $D_g = \mathbb{R}$

d)  $g(x) = \frac{x^2 - 6}{x}$   $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e)  $g(x) = x + 4$   $D_g = (-\infty, -4)$

f)  $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$   $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.91 a)  $D_g = [1, 4]$   $ZW_g = 1$  b)  $D_g = \mathbb{R}$   $ZW_g = 4$  c)  $D_g = [1, 5]$   $ZW_g = 4$

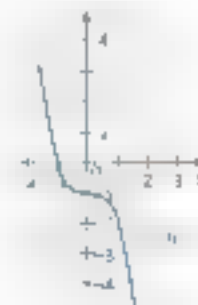
a)



b)



c)





1.93 a)  $g(x) = 0 < x < 5$ ;  $h(x) = 0 < x < 6$ ; b)  $g$  rosnąca w przedziałach  $(-5, 0)$ ,  $(2, 6)$ ;  $h$  rosnąca w przedziałach  $(-6, -2)$ ,  $(0, 5)$

1.94 a)  $-6, -1, 5$ ;  $(0, 4)$  b)  $-5, 1, 6$ ;  $(0, -4)$  c)  $-8, -2, 3$ ;  $(0, 2)$

1.95 a)  $y = \frac{x-3}{2x}$  b)  $y = \frac{x-3}{2x}$

Symetria środkowa. Symetria środkowa względem punktu  $(0, 0)$

1.99 a) 

x	45	10	1	0	7	3	6
y	80	21	5	2	8	9	20

1.100 a)  $D = \{5, 2\}$ ;  $ZW_1 = 2$  b)  $D = \{5, 4\}$ ;  $ZW_1 = -5, 1$   
c)  $D = \{1, 3, 4\}$ ;  $ZW_1 = 2, 3$  d)  $D = \{5, 5\}$ ;  $ZW_1 = 3, 1$

1.101 a)  $g(x) = x + 4$ ;  $D = \{0, 3\}$  b)  $g(x) = x + 4$ ;  $D = \{-4, 0\}$



d)  $g(x) = \frac{1}{x}$ ;  $D = \{4, 1\}$



1.102 a)  $ZW_1 = 4, 2$  b)  $4$  c)  $12$  d)  $3, 3$  e)  $3$

1.103 a)  $D_1 = \{7, 3\}$ ;  $ZW_1 = 4, 0$  b)  $D_1 = \{5, 1\}$ ;  $ZW_1 = 2, 6$

c)  $D_1 = \{9, 1\}$ ;  $ZW_1 = 8, 5$  d)  $D_1 = \{1, 2, 4\}$ ;  $ZW_1 = \{1, 10, 1\}$

1.104 a)  $g(x) = -4x - 7$ ;  $(0, 7)$  b)  $g(x) = -4x - 7$ ;  $(0, 7)$

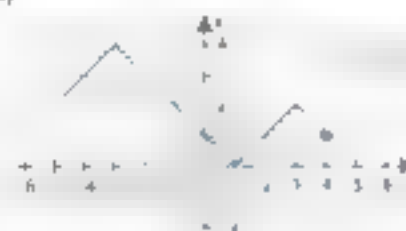
f)  $g(x) = 3(x + 1)(1 - x)$  g)  $2, 1$  (0, 6)

Wykres funkcji  $y = |f(x)|$  oraz  $y = f(|x|)$

1.105 

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

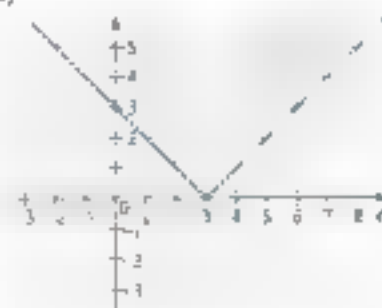
1.106 a)



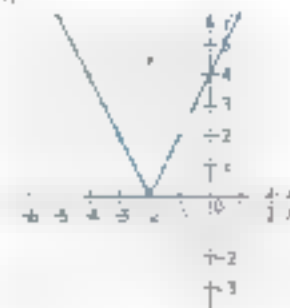
b)



1.107 a)



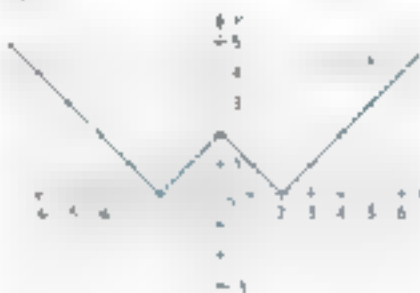
b)



c)



d)



1.108 a)



b)



c)



d)



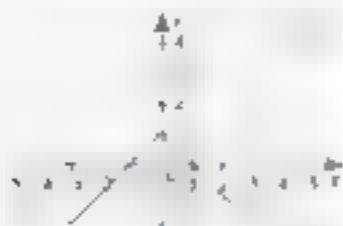
1.109 a)

x	0	25	1	2	25	30
y = f(x)	5	1	18	15	2	0

b)

x	6	5	4	3	0	1	2	3	4	5	6
y = f(x)	1	10	8	6	4	7	2	4	6	8	1

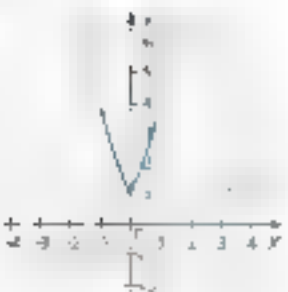
1.110 a)



b)



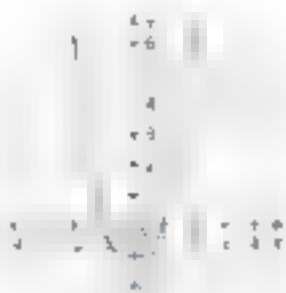
1.111 a)



b)



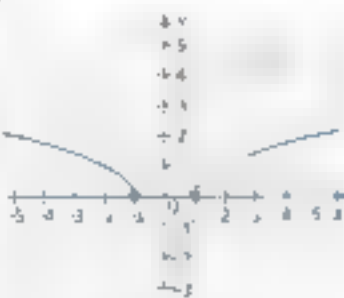
c)



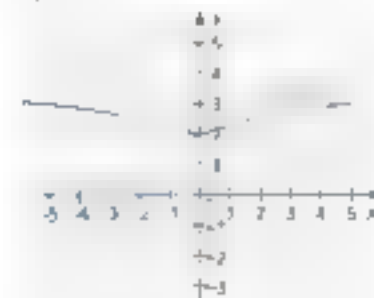
d)



1.112 a)



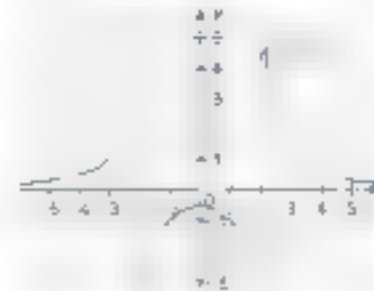
b)



c)



d)

1.113. a)  $x \in (0, +\infty)$  b)  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ 

1.114. a) 0.5 b) 0.9 c) 1.10 d) 1.15

1.115. a) 4.4 b) 7.0 c) 10.7 d) 5.2 e) 1.5 f) 2.1 g) 2.2 h) 2.3

1.116. a) 18.2 b) 2.28 c) 7.28

1.117. a) 0.3 b) 0.3

Wykres funkcji  $y = k \cdot f(x)$  oraz  $y = f(k \cdot x)$ , gdzie  $k \neq 0$ 

1.118. a) A (0, 0) B (1, 9) C (6, 9) b) A (0, 0) B (3, 1) C (6, 1)

c) A (0, 0) B (2, 2) C (6, -2)

1.119.

x	-13	-8	-5	-2	3	4	7
y = g(x)	0	5	20	5	30	35	0

1.123

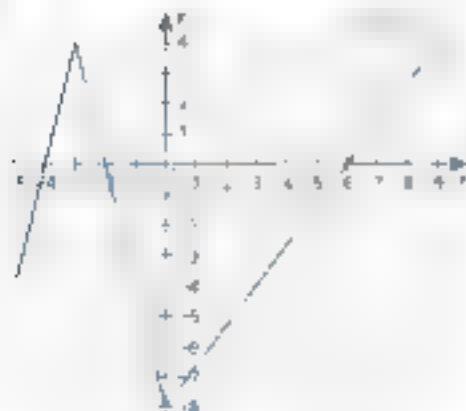
a)



b)



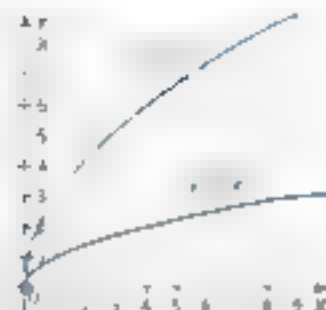
c)



d)



1.124 a)



b)



1.125. a) A(-3, 0), B(2, -2), C(6, 2) b) A(12, 0), B(-3, -2), C(-9, 2)

c) A(10, 0), B(5, 2), C(15, 2)

1.126 a)

$$\begin{bmatrix} x & y & z & t & u & v \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} x & y & z & t & u & v \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} x & y & z & t & u & v \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} x & y & z & t & u & v \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

1.127 a)  $D_f = \frac{3}{2}$  b)  $D_f = 0.4$  c)  $D_f = 1.2$  d)  $D_f = -4.2$ 

1.128. a)

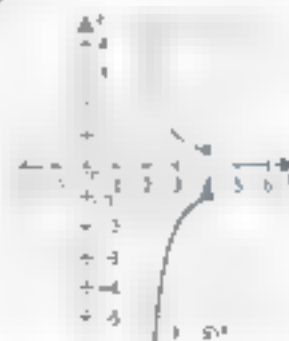
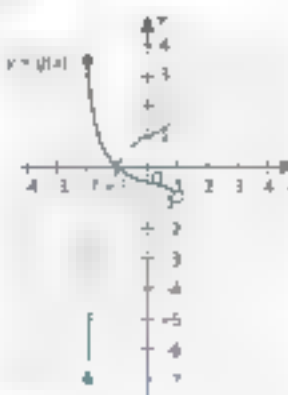


b)



g(x) = 2x - 1, D\_g = 4, ZW\_g = 0.3 g(x) = 3x - 2, D\_g = 4.2, ZW\_g = 2.2

d)



g(x) = 1/x - 1, D\_g = 2, ZW\_g = 1/2 g(x) = 2/x - 1, D\_g = 2.4, ZW\_g = (-∞, 1)

1.129



a) g(x) = 1/2 x - 1, b) 2.2



1.130



a)  $y = x^2 - 2x + 1$  b)  $y = x^2 - 2x + 1$  c)  $y = x^2 - 2x + 1$

1.131. wykresy: a)  $y = 2 - f(x)$  b)  $y = g(4x)$  c)  $y = g(x + 1)$ 1.132. a)  $y = f(2x)$  b)  $y = 2g(x)$  c)  $y = h(x)$ 1.133.  $D_f = \{32, 96\}$ ; miejsca zerowe funkcji  $g$ : 32 oraz 321.134.  $D_f = \{9, 5\}$ ;  $ZW_g = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ;  $(0, -4)$ 1.135.  $D_g = \{1, \frac{1}{3}\}$ ;  $ZW_g = \{9, 4\}$ ; miejsca zerowe funkcji  $g$ : 3, 0, 61.136.  $D_g = \{5, 10\}$ ;  $ZW_g = \{80, 48, 0, 9\}$ 

Szkicowanie wykresów wybranych funkcji

1.137. a)  $g_1(x) = (x - 3)^2 + 1$ ,  $g_2(x) = -(x - 3)^2 - 1$  b)  $g_1(x) = x^2$ ,  $g_2(x) = (x - 3)^2 + 1$ 1.138. a)  $g(x) = x^2 - 4$ ,  $g(x) = x^2 - 4$  b)  $g(x) = x^2 - 4$ ,  $g(x) = x^2 - 4$ 

1.139. a) nie b) tak

1.140. tak

1.141. a)  $y = \frac{1}{x} - 3$  b) nie1.142. nie; wówczas otrzymamy wykres funkcji  $y = f(|x| - 5)$ 1.143. nie; wówczas otrzymamy wykres funkcji  $y = f(|x - 4|)$ 

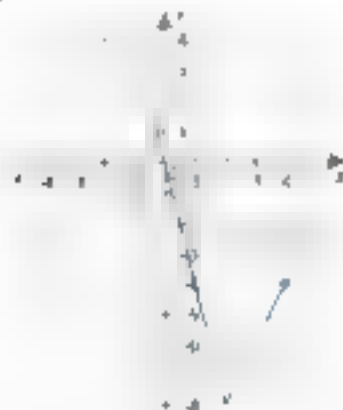
1.144. a) b)



c)



d)



1.145. a)



b)



c)



d)



1.146. a)



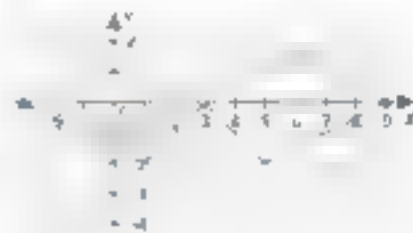
b)



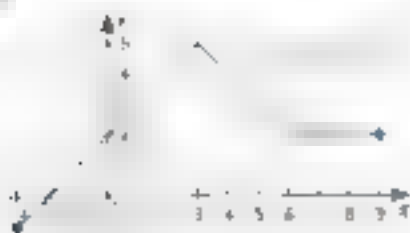
c)



d)



147 a)



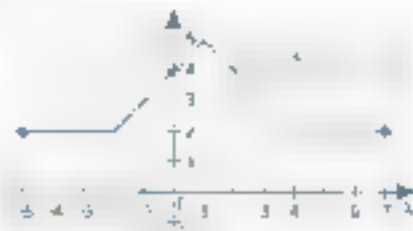
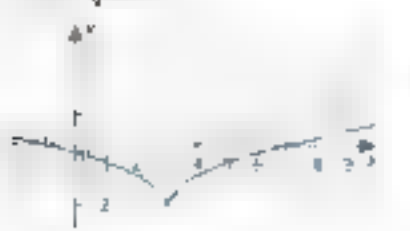
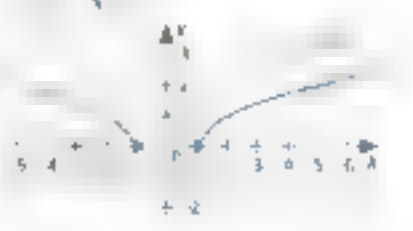
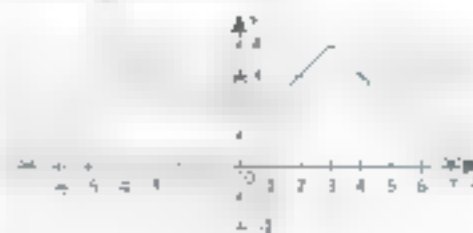
b)



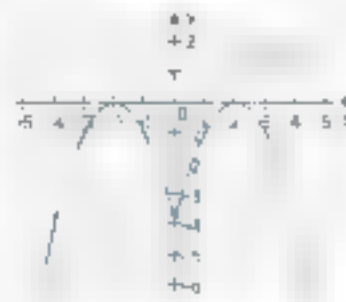
c)



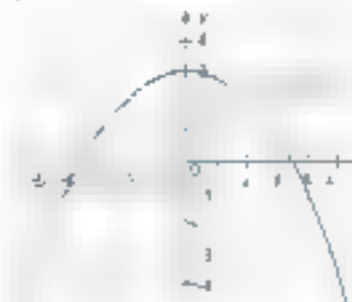
d)

148 a)  $f(x) = \sqrt{2}x + 3$ b)  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ c)  $f(x) = \sqrt{x} + 1$ d)  $f(x) = \sqrt{x} - 1$ 149 a)  $f(x) = x^3 + 1$ b)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ c)  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ d)  $f(x) = x^2 + 1$ 

150 c)



d)



151 b)



d)



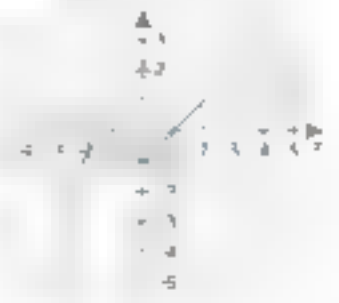
1.52  
c)



1.53 a)  $f(x) = 2 - x^2$



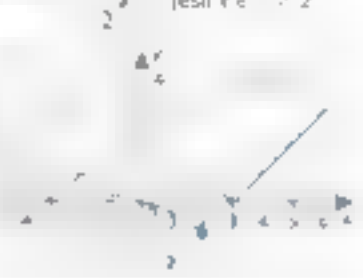
b)  $f(x) = (x+1)^2$  jeśli  $x \leq 1$   
 $f(x) = 1$  jeśli  $x > 1$



c)  $f(x) = \sqrt{x-1}$  jeśli  $x \geq 1$   
 $f(x) = 3$  jeśli  $x < 1$



d)  $f(x) = 3$  jeśli  $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$   
 $f(x) = 2$  jeśli  $x = 2$



Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności

- 1.154.  $x \in [-1, -3]$
- 1.155.  $x = -4$
- 1.156.  $x \in [1, 3]$
- 1.157.  $x \in (0, +\infty)$  b)  $x = 4$  c)  $x = -4$
- 1.158. a)  $x \in [2, 4]$  b)  $x \in [2, 5]$  c)  $x \in [1, 1]$
- 1.159. a)  $x = 1$  b)  $x \in \{-1, 1\}$  c)  $x = 7$
- 1.160.  $(-\infty, -3] \cup (-2, +\infty)$
- 1.161.  $\{1, 5\}$

- 1.162.  $(-\infty, 0] \cup 4 + \infty$
- 1.163. a)  $x = 1$  b)  $x = -1, 0$
- 1.164. a)  $x \in [0, 1]$  b)  $x \in [2, 5]$  c)  $x \in [1, 1]$
- 1.165. a)  $x \in [0, 5]$  b)  $x \in [2, 4]$  c)  $x \in [1, 3]$  d)  $x \in [4, 5]$  e)  $x \in [5, 14]$
- 1.166. a)  $x \in [2, 4]$  b)  $x \in [2, 4]$
- 1.167. a)  $x \in [1, 3]$  b)  $x \in (-1, 1) \cup (1, 3)$
- 1.168. a)  $x \in [2, 2]$  b)  $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (2, +\infty)$
- 1.169. a)  $x \in [0, 5]$  b)  $x \in [4, 5]$  c)  $x \in [1, 2]$  d)  $x \in [4, 0, 4]$
- 1.170. a)  $x \in [0, 2]$  b)  $x \in [8, 2]$  c)  $x \in [1, 1]$  d)  $x \in [0]$
- 1.171. a)  $x \in [1, 7]$  b)  $x \in [1, 1] \cup (-3, 2) \cup (4, +\infty)$  c)  $x \in [1, 1]$  d)  $x \in [1, 1]$  e)  $x \in [1, 1]$

Test sprawdzający do rozdziału 1

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	D	D	B	B	D	A	C	A
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	16
Odpowiedź	B	D	B	C	B	C	C	C

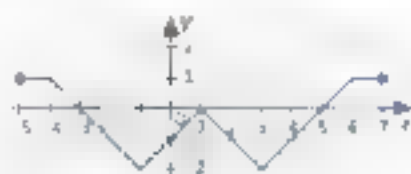
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

- 16. a)  $A(6, -8)$  b)  $C(12, 23)$
- 17.  $D(-4, 2), |AC| = 6\sqrt{2}$
- 18.  $D(7, 1)$
- 19. Wykaz ze  $OC = 2 \cdot AB$
- 20. a)  $g(x) = x$  b)  $a = 1$  c)  $b = a = 9$
- 21. a)  $g(x) = 3x - 1$  b)  $\vec{v} = (0, 6)$
- 22. a)  $g(x) = 7x - 3$  b)  $h(x) = 2x - 3$  c)  $h(x) = 2x - 3$
- 23. a)  $g(x) = 7x - 3$  b)  $h(x) = 2x - 3$  c)  $h(x) = 2x - 3$
- 24. a)



b)  $\{-3, 2\}, \{2, 3\}$

26. a)



b)  $x \in [1, 5]$

27. a)  $D = [4, 20]$  ZW  $(-\infty, 1)$  b)  $D = [4, 8]$  ZW  $x < 1$ 

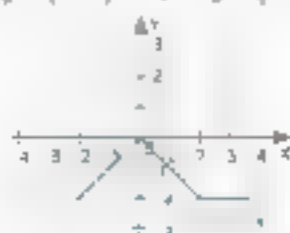
c)  $D = [7, 5]$  ZW  $5 < x < 1$

28. a)  $g(x) = \frac{x}{2} - 1$  b)  $x \in (-2, 0)$ 29. a)  $x = -4$  b)  $x \in [1, 3]$  c)  $x \in [-2, 2]$ 30. a)  $x \in (-\infty, -3) \cup \{0\}$  b)  $x \in (-2, 1)$  c)  $x \in \{-5, -2\} \cup (-1, +\infty)$ 31. bi przesunięcie równoległe o wektor  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  i  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  a następnie syme

tria względem osi  $OY$ ,  $h(x) = \sqrt{-x+7}$

32. b)  $D_g = (-7, 5]$  c)  $ZW_g = (-2, 4)$  d) 20

33. a)



b)  $g(x) = f(x-1)$  c) 1

35. a)  $x \in [2, 0, 2]$  b)  $x \in [2, 0]$ 36. a)  $x \in \{1, 3\}$  b)  $x \in \{x, 1\}$  c)  $2 < x < 1$ 

37



a)  $D = [1, 1]$  ZW  $(-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$  b) funkcja  $g$  jest rosnąca w każdym z przedziałów  $(-\infty, 1)$  i  $(1, 0)$ , funkcja  $g$  jest malejąca w każdym z przedziałów  $(0, 1)$ ,  $(1, +\infty)$  c)  $x \in \{-2, -1\} \cup \{1, 2\}$

38. a)  $m = 3$  b)  $x \in \{4, 2\} \cup \{1, 1\} \cup \{2, 4\}$ 39. a)  $m = 4$  b) równanie ma cztery rozwiązania

40

a)  $x \in \{-10, -5, -2, 3\}$

b)  $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{jeśli } x < -4 \\ 0 & \text{jeśli } x = -4 \\ 2 & \text{jeśli } x > -4 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{jeśli } x < -4 \\ 0 & \text{jeśli } x = -4 \\ 2 & \text{jeśli } x > -4 \end{cases}$$

41.



a)  $ZW = [4, \infty)$  b)  $x = 4$  c)  $x = 1 \vee x = 3$  d)  $x = 5$

c)  $x \in (-\infty, 5) \cup (1, 1) \cup (5, +\infty)$

## 2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

2.1. a) 4 b) 1 c) 0,7 d)  $3 - \sqrt{2}$  e)  $\sqrt{5} - 2$  f) 0

2.2. a) 3 b)  $4x - 7$  c)  $1,7 - 2\sqrt{2}$  d)  $\sqrt{2}$  e) 0 f)  $2\sqrt{3} - 2$

2.3. a) -3 b)  $2\sqrt{2}$  c) -1,2 d)  $-e^2$

2.4. a) 11 b) -11 c) 17 d)  $245 - 140\sqrt{5}$

2.5. a) 8 b) 1 c) -6 d)  $2\frac{1}{4}$

2.6. a) -36 b) -5

2.7. a) 5 b) -3

2.8. a) 1,0 b) 50

2.9. a) 0-2 b) -3-0 c)  $3\pi - 2$  d) 20-4

2.10. a) 20-20 b) 50-1 c) 0-1 d) 1-0

2.11. a)  $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jeśli } x \leq 0 \\ 0, & \text{jeśli } x > 0 \end{cases}$  b) c)  $\begin{cases} 2x-6, & \text{jeśli } x < -3 \\ 2x-6, & \text{jeśli } x \geq -3 \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{jeśli } x < 1 \\ -3x+6, & \text{jeśli } x \geq 1 \end{cases}$  e)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, & \text{jeśli } x < 3 \\ 3-\frac{1}{3}x, & \text{jeśli } x \geq 3 \end{cases}$

2.12. a)  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \leq 0 \\ x, & \text{jeśli } x > 0 \end{cases}$  b)  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \leq 0 \\ 5, & \text{jeśli } x > 0 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} 0.5x-1, & \text{jeśli } x \leq 2 \\ 0.5x-1, & \text{jeśli } x > 2 \end{cases}$  d)  $f(x) = \begin{cases} 2x-4, & \text{jeśli } x \leq 4 \\ 2x-4, & \text{jeśli } x > 4 \end{cases}$

2.13. a) 1 b) 6 c) -7 d) 4

2.17. a) -90 b) -23 c) 11 d) 20

Odstępek między liczbami na osi liczbowej.

Geometryczna interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej

2.18. a) c) 1 d) 3 b) c)  $\frac{1}{2}$  d)  $\frac{1}{2}$  c) c) 3.45 d) 4.95

d)  $c=45, \frac{7}{12}, d=42, \frac{1}{4}$  e)  $c=16, \frac{7}{2}, a=13, \frac{7}{2}$  f)  $c=2, \frac{1}{5}, d=7, 3\sqrt{5}$

2.19. a) 1 5 b) 7 3 c) 33 19

d)  $\sqrt{2}, 3, \sqrt{2}, 3$  e)  $4, \frac{1}{2}, 2$  f)  $3, 2, 3, 5$

2.20. a) 4 6 b) 1 7 c)  $x, 5, 1-x$

d)  $x, 7, 1, 5, x, e) x, 5, 7, x, f) 9, 4$

2.21. a) 24 b)  $31\frac{1}{3}$  c)  $2\sqrt{3}$  d)  $6\sqrt{2}, 3$  e) B f) 3  $4\sqrt{3}$

2.22. a) 8 b) 5 c) 3 d) 9 d)  $x, B, 3$

e)  $p+2, 7$  f)  $x, 1, 5$  g)  $7, m, 2$

2.23. a) 16 Bm b)  $5m-15$  c)  $m+15$  d)  $m^2+33$

Proste równania z wartością bezwzględną

2.24. a)  $x=3$  b) 4, 10 c) żadna d) 5

2.25. a)  $x = \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$  b) równanie sprzeczne c)  $x = \frac{1}{4}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}$

d) równanie sprzeczne e)  $x=0$  f)  $x=3, 3$

2.26. a)  $x = \frac{1}{5}, 1, 5$  b)  $x = 5, 3, 1$  c)  $x=3$

d)  $x = 3, 1$  e)  $x = 3, 7$  f)  $x = 1, 9$

2.27. a)  $x=9$  b)  $x \in \{5, 11\}$  c)  $x \in \{1, 21\}$

d)  $x \in \{8, 24\}$  e)  $x \in \{8, 6\}$  f) równanie sprzeczne

2.28. a)  $x=1, 0$  b)  $x=19, 0$  c) np.  $x=1, x$

d)  $x=0, 8$  e)  $x=2, 5$  f)  $x=2, 5$

2.29. a)  $x \in \sqrt{6}$  b)  $x=2, \sqrt{3}$  c)  $x=3, 5, 0$  d)  $x=1, 6$

e)  $x=2, 5, 6$  f)  $x = \frac{1}{2}, 4$

2.30. a)  $x=1, 3$  b)  $x=6$  c)  $x=5, 7$  d)  $x=5, 1$

e) równanie sprzeczne f)  $x \in \{-6, -4\}$

2.31. a)  $x \in [-5, 6, 8]$  b)  $x \in \{2, 8, 4\}$  c)  $x=-2, 5$  d) równanie sprzeczne

e)  $x \in \{-1, 3\}$  f)  $x \in \{-13, 7\}$

2.32. a)  $x \in [0, 4]$  b)  $x \in [4, 2]$  c)  $x \in [3, 24]$  d) 276

d) równanie sprzeczne e)  $x \in \{10, 3, 24, 8\}$  f)  $x \in [-10, 8]$

2.33. a) równanie sprzeczne b)  $x \in \{-7+5\sqrt{5}, 7-\sqrt{5}\}$  c)  $x \in \{5\sqrt{3}-7, 7-\sqrt{5}\}$

d)  $x \in [0, 2, 1]$  e)  $x \in [2, 2, 3, 3]$  f)  $x \in [6, 3, 2, 3, 2]$

2.34. a)  $x \in [3, 1, \frac{1}{5}]$  b)  $x \in [4, \frac{19}{25}, 5]$  c)  $x \in [3, \frac{1}{2}]$

d)  $x \in [-6, 7]$  e)  $x \in [\frac{3}{4}, 2]$  f)  $x \in [3, \frac{3}{5}, 2, \frac{4}{5}]$

2.35. a)  $x \in [2, 6]$  b)  $x \in [2, 4]$  c)  $x \in [5, 3]$  d) równanie sprzeczne

e)  $x=3$  f)  $x \in \{-6, 2\}$

2.36. a)  $A=1, 3, B=5, C=5, 3$

b)  $B, C, A=3, (A, C, B=5, 3, C=4, B)$

2.37. a)  $x=2, 2'$  b)  $x \in [-8, 2]$  c)  $x \in [2, 6]$  d)  $x \in [6, 9, 3]$

e)  $x \in [2, 6]$  f)  $x \in [8, 6]$

2.38. a)  $x \in [3, 2\sqrt{2}, 3, 2\sqrt{2}]$  b)  $x \in [2, 5, \sqrt{5}]$  c)  $x \in [4\sqrt{3}, 6, 4\sqrt{3}, 6]$

d)  $x \in [3\sqrt{2}, 4, 3\sqrt{2}, 4]$

2.39. a) jeśli  $m=4$ , to  $x=1$ , jeśli  $m=3$ , to  $x=9$  b)  $m=2$ , drugie rozwiązanie nie istnieje c) jeśli  $m=-11$ , to  $x=25$ , jeśli  $m=7$ , to  $x=-11$  d)  $m=-2$  lub  $m=1$ ,  $x=2$

2.40. a) np.  $x=3, 0$  b) np.  $x=1, 2$  c) np.  $x=7, 3$  d) np.  $x=5, 6$

e) np.  $x=1, 2$  f) np.  $x=8, 8$

Proste nierówności z wartością bezwzględną

2.41. a) 3, 6, 7 b) -8, 6 c)  $-2, 3\frac{1}{2}, 5$  d) -2

2.42. a)  $x=0$  b)  $x \in \{-1\}$  c)  $x \in \emptyset$  d)  $x \in \emptyset$

2.43. a)  $x \in [4, 4]$  b)  $x \in [1, x, 6]$  c)  $x \in [1, x, 9]$  d)  $x \in [9, x, 9]$

e)  $x \in [2, 2]$  f)  $x \in [8, 8]$  g)  $x \in [x, \sqrt{3}]$  h)  $x \in [x, \sqrt{3}]$

2.45. a)  $x \in \{1, 7\}$  b)  $x \in [3, 1]$  c)  $x \in \mathbb{R}$  d)  $x \in \{3, 5\}$

e)  $x \in [2, 4]$  f)  $x \in [x, 7]$  g)  $x \in [3, x]$



2.46. a)  $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$  b)  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  c)  $x \in [-2, 2]$

d)  $x \in [0, 8]$  e)  $x \in [6, 12]$  f)  $x \in (-2, 7)$  g)  $x \in (-\infty, 1)$

2.47. a) np.  $|x| < 9$  b) np.  $|x| > \sqrt{5}$  c) np.  $|x - 4| < 8$  d) np.  $|x + 1| \geq 3$

e) np.  $x \in [1, 1]$  f) np.  $x \in [5, 5]$  g) np.  $x \in [2, 7]$

h) np.  $x \in [7, \sqrt{3}]$  i) np.  $x \in [3, 3]$

2.48. a)  $x \in (-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$  b)  $x \in (-5, -1)$  c)  $x \in (-\infty, 7) \cup (-1, +\infty)$

2.49. a)  $x \in (-9, 8; 7)$  b)  $x \in (-\infty; 1, 2) \cup (4, +\infty)$  c)  $x \in (-\infty; -1, 5) \cup (1, +\infty)$

d)  $x \in (0, 5; 11)$  e)  $x \in \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$  f)  $x \in (1, 2; 12)$

2.50. a)  $x \in (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$  b)  $x \in (-\infty, -1\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$  c)  $x = -\sqrt{5}$

d) nierówność sprzeczna e)  $x \in (-2, 2)$  f)  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  g)  $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  h)  $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

2.51. a)  $x \in \left(-37\frac{2}{3}, 29\right)$  b)  $x \in \left(-4, 4\frac{2}{3}\right)$  c)  $x \in \left(-\infty, -1\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$

d)  $x \in (-2, 2)$  e)  $x \in (-3, 4)$  f)  $x \in (-1, 1)$

2.52. a)  $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{10}\right\}$  b) nierówność sprzeczna c)  $x \in (13, 17)$

d)  $x \in \mathbb{R}$  e)  $x = \frac{8}{9}$  f)  $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{5}) \cup (3 + \sqrt{5}, +\infty)$

2.53. a)  $-9, -2$  c)  $A \cap B = (-5, 5) \cup (-3, 0)$  b)  $B - A = (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$

2.54. a)  $A = [-2, 2]$ ,  $B = (-3, 1)$  b)  $0, 1$  d)  $A' \cap B' = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

2.55. a)  $0, 1, 2$  b)  $3, 4, 5$  c)  $-2, -1, 0, 1, 2$  d)  $0$

2.56. a)  $x \in (3, 5)$  b)  $x \in \left(-3, -1\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

2.57. a)  $x \in (0, 4)$  b)  $x \in \mathbb{R}$  c)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$  d)  $x \in (-\infty, \sqrt{2} - 1) \cup (\sqrt{2} + 10, +\infty)$

e) nierówność sprzeczna f)  $x \in (-\infty, 1) \cup (4\sqrt{3} - 1, +\infty)$

2.58. a)  $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$  b)  $x \in (-\infty; 1, 5) \cup (3, +\infty)$  c)  $x \in (12, 6)$

d)  $x \in [2, 8]$

2.59. a)  $x \in (-1, 5)$  b)  $x \in (-5, 1)$  c)  $x \in (-1, 3)$  d)  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

**Własności wartości bezwzględnej**

2.60. a)  $0$  b)  $2|x - 3|$  c)  $-9$  d)  $9$  e)  $0$  f)  $1 - 2|x - 1|$

2.61. a)  $1$  b)  $8$  c)  $3|x - 4|$  d)  $5$  e)  $|2 - 3x|$  f)  $\frac{1}{15|x + 2|}$

2.62. a)  $2$  b)  $4$  c)  $1$  d)  $2$  e)  $1$  f)  $2$  g)  $1$  h)  $2$  i)  $1$  j)  $2$  k)  $1$  l)  $2$  m)  $1$  n)  $2$  o)  $1$  p)  $2$  q)  $1$  r)  $2$  s)  $1$  t)  $2$  u)  $1$  v)  $2$  w)  $1$  x)  $2$  y)  $1$  z)  $2$

2.63. a)  $x \in \mathbb{R}$  b)  $x \in \mathbb{R}$  c)  $x \in \mathbb{R}$  d)  $x \in \mathbb{R}$  e)  $x \in \mathbb{R}$  f)  $x \in \mathbb{R}$  g)  $x \in \mathbb{R}$  h)  $x \in \mathbb{R}$  i)  $x \in \mathbb{R}$  j)  $x \in \mathbb{R}$  k)  $x \in \mathbb{R}$  l)  $x \in \mathbb{R}$  m)  $x \in \mathbb{R}$  n)  $x \in \mathbb{R}$  o)  $x \in \mathbb{R}$  p)  $x \in \mathbb{R}$  q)  $x \in \mathbb{R}$  r)  $x \in \mathbb{R}$  s)  $x \in \mathbb{R}$  t)  $x \in \mathbb{R}$  u)  $x \in \mathbb{R}$  v)  $x \in \mathbb{R}$  w)  $x \in \mathbb{R}$  x)  $x \in \mathbb{R}$  y)  $x \in \mathbb{R}$  z)  $x \in \mathbb{R}$

2.64. a)  $2\sqrt{x}$  b)  $2x^2$  c)  $x$

2.65. a)  $4$  b)  $9$  c)  $6$

2.66. a)  $3x - 3$  b)  $3x - 9$  c)  $\frac{1}{3}$  d)  $\frac{x - 3}{x - 1}$

2.67. a)  $x \in [0, 4]$  b)  $x \in [0, 4]$  c) równanie sprzeczne d)  $x \in [1, 5]$

e)  $x \in [9, 1]$  f)  $x \in [2, 2]$

2.68. a)  $x \in \left(1\frac{2}{3}, 5\right)$  b)  $x \in [-2, 1]$  c)  $x \in \left[-4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}\right]$  d)  $x \in \left[\frac{2}{3}, 10\right]$

e)  $x \in [1, 4]$  f)  $x \in [3, 3]$

2.69. a)  $x = 0$  b)  $x = 3$  c) równanie sprzeczne d)  $x = -2$

2.71.  $1, 6$

2.74.  $x = 5$  Zauważmy, że  $5 - 3 = 2$  oraz  $x - y = 2$  oraz  $x - 1 = 1 + (y - 3)$  Skorzystaj z odpowiedniej własności wartości bezwzględnej.

**Równania z wartością bezwzględną**

2.78. a)  $x \in \{-14, 14\}$  b)  $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$  c)  $x \in \{-8, -2, 0, 6\}$  d)  $x \in \{-5, 11\}$

e)  $x \in \{-4, 2, 3, 9\}$  f)  $x \in \left\{-2\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2\right\}$

2.79. a)  $x \in [0, 2]$  b)  $x \in [0, 2]$  c)  $x \in [2, 4]$  d)  $x \in [9, 7]$

e) równanie sprzeczne f)  $x \in [6, 3]$

2.80. a)  $x = \frac{1}{2}$  b) równanie sprzeczne c)  $x \in [4, 0]$  d)  $x \in [2, 6]$

e)  $x \in [1, 2]$  f)  $x \in [0, 2]$

2.81. a)  $x \in [1, 3]$  b)  $x \in [3, 1]$  c)  $x \in [2, 2]$  d)  $x \in [7, 7]$  e)  $x \in [3, 3]$  f)  $x \in [0, 0]$

2.82. a)  $x \in [1, 1]$  b)  $x \in [4, 2]$  c)  $x \in [8, 8]$  d) równanie sprzeczne

e)  $x \in [1, 1]$  f)  $x \in [1, 1]$

2.83. a)  $x \in [1, 1]$  b)  $x \in [0, 2]$  c)  $x \in [4, 2]$  d)  $x \in [5, 5]$

2.84. a)  $x \in [1, 3]$  b)  $x \in [1, 3]$  c)  $x \in [2, 0]$  d)  $x \in [5, 3]$  e)  $x \in [1, 3]$

2.85. a)  $x \in [0, 1]$  b)  $x \in [2, 2]$  c)  $x \in [5, 5]$  d)  $x \in [3, 3]$  e)  $x \in [1, 1]$  f)  $x \in [6, 0]$

## Nierówności z wartością bezwzględną

2.86. a)  $x \in (-3, 3)$  b)  $x \in (-\infty, -5) \cup (8, +\infty)$  c)  $x \in (-\infty, -8) \cup (-6, 2) \cup (4, +\infty)$   
 d)  $x \in (-4, 0) \cup (4, 8)$  e)  $x \in (-3, 2) \cup (-1, 5)$

f)  $x \in \left(-\infty, -1\frac{2}{3}\right) \cup \left(-1, 2\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$

2.87. a)  $x \in (-3, 5)$  b)  $x \in (-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$  c)  $x \in (-9, -7) \cup (-3, -1)$   
 d)  $x \in (-1, 5)$  e)  $x \in (-\infty, 3) \cup (1, 5)$  f)  $x \in (-\infty, 3) \cup (1, 5)$

2.88. a)  $x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$  b)  $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$  c)  $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$  d)  $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

e) nierówność sprzeczna f)  $x \in \mathbb{R}$

2.89. a)  $x \in (0, \infty)$  b)  $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$  c)  $x \in (-\infty, 3) \cup (7, \infty)$

e)  $x \in (-4, 5)$  f)  $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

2.90. a)  $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{3}{5}\right)$  b)  $x \in (-5, 1)$  c)  $x \in (-5, 5)$  d)  $x \in (-1, 1)$

d)  $x \in (-4, 2) \cup (2, 8)$  e)  $x \in (-4, 1)$  f)  $x \in (-\infty, \infty)$  g)  $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2.91. a)  $x \in \left(1\frac{2}{3}, 2\right)$  b)  $x \in (1, 2)$  c)  $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$  d)  $x \in (-\infty, 1)$

e)  $x \in (-6, 2) \cup (0, 6) \cup (6, 30)$  f)  $x \in (-\infty, -2) \cup \left(2, 3\frac{1}{3}\right) \cup (6, +\infty)$

2.92. a)  $x \in (1, 2)$  b)  $x \in (-2, +\infty)$  c)  $x \in \mathbb{R}$  d) nierówność sprzeczna

2.93. a)  $x \in (-\infty, 12) \cup (20, +\infty)$  b)  $x \in \left(1\frac{2}{3}, +\infty\right)$  c)  $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$

d)  $x \in (-1, 3)$  e)  $x \in (-\infty, 6) \cup (4, \infty)$  f)  $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2.94. a)  $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$  b)  $x \in (-2, 4)$  c)  $x \in \mathbb{R}$  d)  $x \in (-1, 5)$

e)  $x \in (-1, 3)$  f) nierówność sprzeczna

## Równanie liniowe z parametrem

2.95. a)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, x = \frac{4}{m-1}$  b)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{4\}, x = \frac{m}{m-4}$  c)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x = 0$

d)  $m \in (0, +\infty), x = \frac{2}{\sqrt{m}}$  e)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, x = \frac{2}{m-3}$  f)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x = m-2$

2.96. a)  $a = 1$  b)  $a = 5$  c) nie ma takich  $a$  d) nie ma takich  $a$  e)  $a = 3$

f)  $a = 0$  g)  $a = 6$

2.97. a)  $k = 0$  b)  $k = 1$  c) nie ma takich  $k$  d) nie ma takich  $k$  e)  $k \in \{4, 4\}$

f)  $k = 1$

2.98. a)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  b)  $m \in \mathbb{R}$  c)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$  d)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$  e)  $m \in \mathbb{R}$

f)  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$

2.99. a) jeśli  $m \in \mathbb{R} \setminus \{2, 2\}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{m-4}{2-m}$  jeśli  $m = 2$

to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli  $m = 2$ , to równanie nie ma rozwiązań

b) jeśli  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{a}{a-2}$  jeśli  $a = 0$ , to równanie nie ma rozwiązań

c) jeśli  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{k}{1-k}$ ; jeśli  $k = 0$ ,

to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli  $k = 1$ , to równanie nie ma rozwiązań

d) jeśli  $b \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ , to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = 0$ ; jeśli

$b = \pm\sqrt{3}$  to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania)

e) jeśli  $d \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{d-4}{d-2}$  jeśli  $d = 2$  to równanie nie ma rozwiązań

f) jeśli  $b \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 6\}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{1}{b-6}$  jeśli  $b = \pm 6$ ,

to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli  $b = -6$ , to równanie nie ma rozwiązań

2.100. a) jeśli  $m \in \mathbb{R} \setminus \{4, 4\}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{m}{m-16}$  jeśli

$m = 4$  to równanie jest sprzeczne

b) jeśli  $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{p-1}{p-1}$  jeśli  $p = 1$  to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania)

c) jeśli  $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{p-1}{p-1}$  jeśli  $p = 1$  to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania)

d) jeśli  $m \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{4}{m-4}$  jeśli

$m = 4$  to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania)

e) jeśli  $m = \frac{1}{2}$  to równanie nie ma rozwiązań

f) jeśli  $k \in \mathbb{R} \setminus \{3, 3\}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{k}{k-3}$  jeśli  $k = 3$ ,

to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli  $k = -3$ , to równanie nie ma rozwiązań

f) jeśli  $m \in \mathbb{R}$ ,  $x = 1$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{m}{m-1}$  jeśli

$m = 1$ , to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania); jeśli  $m = -1$ , to równanie nie ma rozwiązań

2.101. a) jeśli  $m \in \mathbb{R}$ ,  $x = 3$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{m-3}{m-2}$  jeśli  $m = 2$

to równanie jest sprzeczne; jeśli  $m = 3$ , to równanie jest tożsamościowe

b) jeśli  $m \in \mathbb{R}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{5m-1}{m-1}$  jeśli

c) jeśli  $m \in \mathbb{R}$ ,  $x = \frac{2}{3}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{m-3}{3m-2}$  jeśli  $m = \frac{2}{3}$

to równanie jest sprzeczne

d) jeśli  $m \in \mathbb{R}$ ,  $x = 1$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{1}{m-2}$  jeśli  $m = 2$

to równanie jest sprzeczne

e) jeśli  $m \in \mathbb{R}$ ,  $x = \frac{m-2}{2(m-3)}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{m-2}{2(m-3)}$  jeśli

$m = -2$ , to równanie jest tożsamościowe; jeśli  $m = -6$ , to równanie jest sprzeczne

f) jeśli  $m \in \mathbb{R} - \{-4, -2, 6, 8\}$ , to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{m-6m+6}{\sqrt{m-2}-5}$  jeśli

jeśli  $m \in \{-2, 6\}$ , to równanie jest tożsamościowe; jeśli  $m \in \{-4, 8\}$ , to równanie jest sprzeczne

2.102. a) jeśli  $a \neq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{2b}{a}$  jeśli  $a = b = 0$ , to

równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli  $a = 0$  i  $b \neq 0$ , to równanie nie ma rozwiązań

b) jeśli  $m \neq 1$  i  $k \in \mathbb{R}$ , to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{k}{1-m}$  jeśli  $m = 1$

i  $k = 0$ , to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli  $m = 1$  i  $k \neq 0$ , to równanie nie ma rozwiązań

jeśli  $d \in \mathbb{R}$  to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = 0$  jeśli  $d = 2$  to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań

d) jeśli  $p \neq 5$  i  $k \in \mathbb{R}$ , to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{k+1}{5-p}$  jeśli  $p = 5$

i  $k = -1$ , to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli  $p = 5$  i  $k \neq -1$ , to równanie jest sprzeczne

e) jeśli  $b \neq c$ , to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{b}{b-c}$  jeśli  $b = c = 0$ , to równanie

ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli  $b = c \neq 0$ , to równanie jest sprzeczne

f) jeśli  $a \neq 0$ , to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = \frac{ab}{a+b}$  jeśli  $a = b = 0$ , to równanie

ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli  $a = -b \neq 0$  to równanie nie ma rozwiązań

### Nierówność liniowa z parametrem

2.103. a)  $x = 2$ , b)  $\mathbb{R}$  c)  $x = 2$  d)  $x = 1$

2.104. a)  $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$  b)  $\mathbb{R}$  c)  $(0, +\infty)$

2.105. a)  $x = 1$  b)  $\mathbb{R}$  c)  $\mathbb{R}$

2.106. a)  $(2, +\infty)$  b)  $\emptyset$  c)  $\mathbb{R}$

2.107. a)  $m = 28$  b)  $m = 4$  c)  $m = 7$  d)  $m = \frac{1}{2}$

2.108. a)  $p = 1$  b)  $p = \sqrt{5}$

2.109. a)  $p = -3$  b)  $\sigma = 11$

2.110. a)  $m \in \mathbb{Z}$  b)  $m = 7$  c)  $m \in \{5, x\}$  d)  $m = -\frac{4}{2}$

2.111. a)  $k = 3$  b)  $k = 2$  c)  $k \in \mathbb{R}$  d)  $k \in \mathbb{R}$

2.112. a)  $m = 1$  b)  $m = 5$  c)  $m \in \{1, 5\}$  d)  $m = 2$

2.113. a)  $m = 2$  b)  $m = 4$  c)  $m \in \{-1, 1\}$  d)  $m = -4$  e)  $m = 2$  f)  $m = 2$

### Równania liniowe z wartością bezwzględną i z parametrem

2.114. a)  $x = 1$  b) równanie tożsamościowe c) równanie sprzeczne d) równanie sprzeczne

2.115. a)  $k \in \mathbb{R}$  b)  $k \in \{2, x\}$  c)  $k \in \mathbb{R}$  d)  $k \in \mathbb{R}$

e)  $k \in \mathbb{R}$  f)  $k \in \mathbb{R}$  g)  $k \in \mathbb{R}$  h)  $k \in \mathbb{R}$

2.116. a) jeśli  $p = 0$  to równanie jest tożsamościowe; jeśli  $p \in (0, +\infty)$  to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (-\infty, 0)$  to równanie ma dwa rozwiązania

b) jeśli  $p = 1$  to równanie ma jedno rozwiązanie; jeśli  $p \in (1, 2)$  to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli  $p \in (2, +\infty)$  to równanie nie ma rozwiązań

c) jeśli  $p = 0$  to równanie ma jedno rozwiązanie; jeśli  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  to równanie nie ma rozwiązań

d) jeśli  $p = 1$  to równanie jest tożsamościowe; jeśli  $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  to równanie nie ma jedno rozwiązanie

e) jeśli  $p \in (-1, 1)$  to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  to równanie ma dwa rozwiązania

f) jeśli  $p \in (-5, 2)$  to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$  to równanie ma dwa rozwiązania

2.117. a) jeśli  $p \in (-\infty, -4)$ , to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (-1, +\infty) \cup \{-4\}$ , to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli  $p \in \{-4, -1\}$ , to równanie ma cztery rozwiązania; jeśli  $p = 1$ , to równanie ma trzy rozwiązania

0, jeśli  $p \in (-\infty, -4)$

2, jeśli  $p \in (-1, +\infty) \cup \{-4\}$

4, jeśli  $p \in \{-4, -1\}$

3, jeśli  $p = 1$

wzór funkcji:  $f(p) =$

b) jeśli  $p \in (-1, +\infty)$ , to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (-\infty, -7) \cup \{-1\}$ , to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli  $p = 7$ , to równanie ma trzy rozwiązania; jeśli  $p \in \{-7, 1\}$ , to równanie ma cztery rozwiązania

0, jeśli  $p \in (-1, +\infty)$

2, jeśli  $p \in (-\infty, -7) \cup \{-1\}$

4, jeśli  $p \in \{-7, 1\}$

3, jeśli  $p = 7$

wzór funkcji:  $f(p) =$

2.118. jeśli  $\sigma \in (-9, +\infty)$  i  $\sigma \neq 9$ , to równanie ma dwa rozwiązania:  $x = -\sigma$  oraz  $x = \sigma + 12$

2.119.  $k \in (-4, +\infty)$

2.120.  $m \in (2, +\infty)$

2.121. a)  $p \in (5, 7)$  b)  $p \in (2, 5)$

2.122. a)  $p \in (4, 5)$  b)  $p \in (1, 2)$

2.123. a)  $k \in (1, 2)$  b)  $k \in (2, 5)$

2.124.  $m \in (-6, -4)$

2.125. a)  $k \in (3, 5)$  b)  $k \in (0, 4)$

2.126. a)  $p \in (10, +\infty)$  b)  $p \in (1, 4)$

2.127. a) jeśli  $p \in (-\infty, 2)$ , to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (2, +\infty)$ , to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli  $p = 2$ , to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli każda liczba rzeczywista należy do przedziału  $(0, 2)$

b) jeśli  $p \in (-\infty, 1)$ , to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p = 1$ , to równanie ma jedno rozwiązanie; jeśli  $p \in (-1, +\infty)$ , to równanie ma dwa rozwiązania

c) jeśli  $p \in (-5, 2)$ , to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (2, +\infty)$ , to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli  $p = 2$ , to równanie ma trzy rozwiązania; jeśli  $p \in (2, 5)$ , to równanie ma cztery rozwiązania

d) jeśli  $p \in (1, 3)$ , to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (3, 4)$ , to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli  $p = 3$ , to równanie ma trzy rozwiązania; jeśli  $p \in (4, +\infty)$ , to równanie ma cztery rozwiązania

2.128. a) jeśli  $p \in (-\infty, -1)$ , to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (-1, +\infty)$ , to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli  $p = -1$ , to równanie ma trzy rozwiązania; jeśli  $p \in (1, +\infty)$ , to równanie ma cztery rozwiązania

b) jeśli  $p \in (-\infty, -1)$ , to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (-1, +\infty)$ , to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli  $p = -1$ , to równanie ma trzy rozwiązania; jeśli  $p \in (1, +\infty)$ , to równanie ma cztery rozwiązania

2.129. a) jeśli  $p \in (-\infty, -1)$ , to równanie nie ma rozwiązań; jeśli  $p \in (-1, +\infty)$ , to równanie ma dwa rozwiązania; jeśli  $p = -1$ , to równanie ma trzy rozwiązania; jeśli  $p \in (1, +\infty)$ , to równanie ma cztery rozwiązania

2.130. a)  $k \in (1, 3)$

2, jeśli  $k \in (3, 5)$

2.131. a)  $g(k) =$

1, jeśli  $k \in (5, 7)$

0, jeśli  $k \in (7, 9)$



0, jeśli  $k \in (-\infty, 1)$

2, jeśli  $k \in (1, +\infty) \cup \{1\}$

3, jeśli  $k = 4$

4, jeśli  $k \in (4, 5)$

5, jeśli  $k \in (5, 6)$

6, jeśli  $k \in (6, 7)$

7, jeśli  $k \in (7, 8)$

8, jeśli  $k \in (8, 9)$

9, jeśli  $k \in (9, 10)$

10, jeśli  $k \in (10, 11)$

11, jeśli  $k \in (11, 12)$

12, jeśli  $k \in (12, 13)$

13, jeśli  $k \in (13, 14)$

14, jeśli  $k \in (14, 15)$

15, jeśli  $k \in (15, 16)$

16, jeśli  $k \in (16, 17)$

17, jeśli  $k \in (17, 18)$

18, jeśli  $k \in (18, 19)$

19, jeśli  $k \in (19, 20)$

20, jeśli  $k \in (20, 21)$

21, jeśli  $k \in (21, 22)$

22, jeśli  $k \in (22, 23)$

23, jeśli  $k \in (23, 24)$

24, jeśli  $k \in (24, 25)$

- d)  $g(k) =$
- 0, jeśli  $k \in (-1, 3)$
  - 2, jeśli  $k \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
  - 3, jeśli  $k \in [3, 5]$
  - 4, jeśli  $k \in [-3, -1) \cup (5, +\infty)$



### Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem

2.130. a) 2 b) 3 c) 26 d) 13

2.131. a) 
$$\begin{cases} x = 17 \\ y = 23 \end{cases}$$
 b) 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$
 c) 
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$
 d) 
$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 20 \end{cases}$$

2.132. a) 
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$$
 b) 
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$$
 c) 
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$
 d) 
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

2.133. a) jeśli  $a \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$ , to układ ma jedno rozwiązanie 
$$\begin{cases} x = 3a \\ y = 2(a-6) \end{cases}$$

jeśli  $a = 6$ , to układ jest sprzeczny

b) jeśli  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , to układ ma jedno rozwiązanie 
$$\begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}$$

jeśli  $a \in \{-1, 1\}$ , to układ jest sprzeczny

c) jeśli  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ , to układ ma jedno rozwiązanie 
$$\begin{cases} x = a \\ y = a^2 - 6a + 8 \end{cases}$$

jeśli  $a = -4$ , to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb postaci

c)  $x = 2x - \frac{1}{2}$  gdzie  $x \in \mathbb{R}$  jeśli  $a = 4$ , to układ jest sprzeczny

d) jeśli  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ , to układ ma jedno rozwiązanie 
$$\begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}$$

jeśli  $a = -3$ , to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb postaci

c)  $x = 2x - \frac{3}{2}$  gdzie  $x \in \mathbb{R}$  jeśli  $a = 3$ , to układ jest sprzeczny

2.134. a) jeśli  $a \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$ , to układ ma jedno rozwiązanie 
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

jeśli  $a = 6$ , to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb mającymi postać

$x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$  gdzie  $x \in \mathbb{R}$

b) jeśli  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ , to układ ma jedno rozwiązanie 
$$\begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}$$

jeśli  $a = 3$ , to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb mającymi postać

$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$  gdzie  $x \in \mathbb{R}$  jeśli  $a = 0$ , to układ jest sprzeczny

c) jeśli  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ , to układ ma jedno rozwiązanie 
$$\begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}$$

jeśli  $a \in \{-2, 2\}$ , to układ jest sprzeczny

d) jeśli  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , to układ ma jedno rozwiązanie 
$$\begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}$$

jeśli  $a = 0$ , to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które są parami liczb mającymi postać  $(x, x - 1)$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$

2.135.  $k \in (12, 18)$

2.136.  $x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$

2.137.  $a = 8, 16$

2.138.  $a = 12$

2.139. a)  $p = 0, 8$ ; b)  $5, 3$

2.140.  $k \in (-3, +\infty)$

2.141.  $a = \frac{1}{3}$

2.142.  $m = \frac{1}{2}, x =$



2.143.  $p \in (-\infty, -9) \cup \{-4\}$

2.144.  $k \in \left(3\frac{2}{3}, 4\right) \cup \left(4\frac{1}{3}, 5\right]$

Test sprawdzający do rozdziału 2

Pytania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedzi	C	C	A	B	B	D	B	A	C	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. a)  $a = 3\frac{1}{3}$ , wartość wyrażenia: 2 b)  $b = 55$ , wartość wyrażenia: -335

12. 1

14.  $a \leq x \leq b$ ,  $3a \leq 3b$

15. a)  $x \in [1, 9]$  b) równanie sprzeczne  $x = 3$

16. a)  $x \in [-10, 4]$  b)  $x = 13, 5$

17. a)  $x \in (-\infty, -5) \cup (11, +\infty)$  b)  $x \in (18, -8)$

18. a)  $x \in [-8, -2]$  b)  $a \in (-7, 3]$

19. a)  $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$  b)  $x = 5$  c)  $a \in \mathbb{R}$  d)  $x \in \mathbb{R}$

20. a)  $x \in (-\infty, 2) \cup (4, 5)$  b)  $x \in (10, -5) \cup (3, 2)$

21.  $A \cup B = \mathbb{R}$ ,  $A \cap B = \{-7, -1\}$ ,  $A - B = \{-1, 3\}$ ,  $B - A = (-\infty, 7) \cup (3, +\infty)$

24. a)  $x = 7$  b)  $x \in (-3, 1)$

25. a) równanie sprzeczne b)  $x \in \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$

26. a)  $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (5\sqrt{2} + 2, +\infty)$  b)  $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

27. jeśli  $p = 1$ , to drugim rozwiązaniem równania jest liczba 5, jeśli  $p = -1$ , to drugim rozwiązaniem równania jest liczba -9

28. a)  $x = 5\frac{1}{2}$  b)  $x = 2\frac{1}{3}$  c)  $x = 6$  d)  $x = 3, 2$

29. a)  $x \in (-\infty, -7) \cup (13, +\infty)$  b)  $x \in (-2, 22)$

30. a)  $x \in (-2, 1, 4)$  b)  $x \in \{-3, -2, 1\}$

31. a)  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, 4) \cup (6, +\infty)$  b)  $x \in (0, 4)$

33. a) jeśli  $k = \frac{2}{3}$ , to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli  $k \in \mathbb{R} - \frac{2}{3}$

to równanie ma jedno rozwiązanie  $x = 2 - 3k$

b) jeśli  $k = 2$ , to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli  $k \in \mathbb{R} - \{2\}$ , to równanie ma jedno rozwiązanie

$$x = \frac{k^2 + k + 6}{k^2 - 4}$$

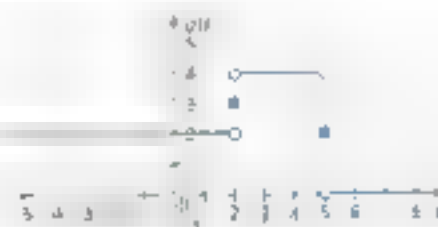
34. a)  $b = 14$  b)  $p = 1$  c)  $x = 1$

35. a)  $m = -5$  b)  $m = 3$

36. a)  $m = 1, 6$  b)  $m = 1 + \sqrt{2}$  c)  $m = 5 + \sqrt{2}$

0, jeśli  $k \in [5, +\infty)$

37.  $g(k) = \begin{cases} 2, & \text{jeśli } k \in (-\infty, 2) \cup \{5\} \\ 3, & \text{jeśli } k = 2 \\ 4, & \text{jeśli } k \in (2, 5) \end{cases}$



38. jeśli  $d \in \mathbb{R}$  to układ ma jedno rozwiązanie, jeśli  $d = \frac{2}{3}$  to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci  $(x, 2 - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Jeśli  $d = \frac{2}{3}$  to układ nie ma rozwiązań

39.  $x \in (-5, +\infty)$

### 3. Funkcja kwadratowa

Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej z klasy 1.

3.1. a)  $x^2 + 2x + 3 = 0$  b)  $x^2 + 2x + 3 = 0$  c)  $x^2 + 2x + 3 = 0$  d)  $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

3.2. a)  $y = \frac{7}{3}x$  b)  $y = x$  c)  $y = 2\sqrt{5}x$

3.3. a)  $b = 2$  c)  $b = 5$  d)  $b = 5$  e)  $b = 0$

3.4. a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$  b)  $f(x) = 3x + 9$

3.5. a)  $y = \frac{1}{3}x + 5$  b)  $y = 2(x - 3)$  c)  $y = \frac{4}{5}x + 4$  d)  $y = x + 4$

3.6. a)  $y = \frac{1}{4}(x + 3)$  b)  $y = \frac{1}{4}(x + 2) + 5$  c)  $y = \frac{1}{4}x + 3 + 4$

d)  $y = \frac{1}{4}x + 5 + 2$

3.7. a)  $W(3, 0)$ ,  $O(9)$  b)  $W(1, 3)$ ,  $O(3)$  c)  $W(0, 4)$ ,  $O(4)$

d)  $W(3, 2)$ ,  $O(2)$  e)  $W(1, 0)$ ,  $O(1)$  f)  $W(2, 1)$ ,  $O(2)$

- 3.8 a)  $ZW = (-\infty, 3)$ ; funkcja jest rosnąca w przedziale  $(-\infty, 0)$ , malejąca w przedziale  $(0, +\infty)$ ;  $x = 0$  b)  $ZW = (-5, +\infty)$ ; funkcja jest malejąca w przedziale  $(-\infty, 0)$ , rosnąca w przedziale  $(0, +\infty)$ ;  $x = 0$  c)  $ZW = (0, +\infty)$ ; funkcja jest malejąca w przedziale  $(-\infty, 4)$ , rosnąca w przedziale  $(4, +\infty)$ ;  $x = 4$  d)  $ZW = (-\infty, 7)$ ; funkcja jest rosnąca w przedziale  $(-\infty, 1)$ , malejąca w przedziale  $(1, +\infty)$ ;  $x = 1$  e)  $ZW = (-5, +\infty)$ ; funkcja jest malejąca w przedziale  $(-\infty, -5)$ , rosnąca w przedziale  $(-5, +\infty)$ ;  $x = -5$  f)  $ZW = (-\infty, 4)$ ; funkcja jest rosnąca w przedziale  $(-\infty, 2)$ , malejąca w przedziale  $(2, +\infty)$ ;  $x = 2$

3.9 a)  $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ ;  $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ ;  $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

b)  $f(x) = \frac{1}{4}(x+1) + 1$ ;  $f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{4} = 1$

c)  $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$ ;  $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

d)  $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$ ;  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

e)  $f(x) = \frac{1}{3}(x+1) - 1$ ;  $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ ;  $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

f)  $f(x) = \frac{1}{5}(x+4)$ ;  $f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$ ;  $f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

3.10. 6 oraz 0

3.11.  $f(x) = \frac{1}{5}x - 3 - 4$

3.12.  $f(x) = 2(x-1) - 2$

3.13.  $f(x) = 5(x-3) - 5$

3.14.  $f(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^2 - 4$

3.15. a)  $x = 3$  b)  $y = x$  c)  $y = -4$  d)  $y = -3x$

Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

3.17. a)  $f(x) = 4x^2 - 24x + 16$  b)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 4$  c)  $f(x) = 5x^2 + 10x - 4$

3.18. a)  $f(x) = x^2 + 1$  b)  $f(x) = x^2 + \frac{5}{2}$  c)  $f(x) = x^2 + 9$

d)  $f(x) = 3(x-4)^2 - 2$  e)  $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$  f)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 6$

3.19. a)  $\Delta = 0$  b)  $\Delta = 49$  c)  $\Delta = 64$  d)  $\Delta = -3$  e)  $\Delta = 0$  f)  $\Delta = -15$

3.20. a)  $f(x) = 2x - \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$  b)  $f(x) = x - 4$  c)  $f(x) = (x-5)^2$

d)  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  e)  $f(x) = 4x^2 - \frac{15}{8}$  f)  $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 5$

3.21. a)  $b = 0$  b)  $b = 10$  c)  $b = 2$  d)  $b = -5$

3.22. a)  $a = 1$  b)  $a = 13$  c)  $a = 2$  d)  $a = 3$  e)  $a = 19$  f)  $a = 5$  g)  $a = 0.5$

3.23. a)  $a = 1$  b)  $a = 2$  c)  $a = 3$  d)  $a = 4$  e)  $a = 5$  f)  $a = 6$  g)  $a = 7$

d)  $a = 1$  e)  $a = 2$  f)  $a = 3$  g)  $a = 4$  h)  $a = 5$  i)  $a = 6$  j)  $a = 7$

3.24. a)  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$  c)  $f(x) = 2(x-2)^2 - 1$  d)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 1$  e)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 1$

f)  $f(x) = 2(x-2)^2 - 1$  g)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 1$  h)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 1$  i)  $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 4x + 1$  j)  $f(x) = \frac{1}{6}x^2 - 4x + 1$

k)  $f(x) = \frac{1}{7}x^2 - 4x + 1$  l)  $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - 4x + 1$  m)  $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 4x + 1$  n)  $f(x) = \frac{1}{10}x^2 - 4x + 1$

3.25. a)  $ZW = (0, +\infty)$  b)  $ZW = (-\infty, 7)$  c)  $ZW = (-\infty, 6)$  d)  $ZW = (-\infty, 4)$

- 3.26. a)  $f$  jest malejąca w przedziale  $(-\infty, 3)$ , rosnąca w przedziale  $(3, +\infty)$   
b)  $f$  jest rosnąca w przedziale  $(-\infty, 10)$ , malejąca w przedziale  $(10, +\infty)$   
c)  $f$  jest malejąca w przedziale  $(-\infty, 6)$ , rosnąca w przedziale  $(6, +\infty)$   
d)  $f$  jest rosnąca w przedziale  $(-\infty, 7)$ , malejąca w przedziale  $(7, +\infty)$

3.27. a) są dwie takie funkcje:  $f(x) = (x+3)^2 - 4$  oraz  $g(x) = (x-3)^2 - 4$  b)  $x = 0$

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej.

Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej

3.28. a) 0 b) 2 c) 2 d) 0 e) 1 f) 0

3.29. a)  $-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$  b) 5 c) 3, 3 d) 5, 4 e)  $f$  nie ma miejsc zerowych f) 3, 1

3.30. a)  $-2, -1$  b)  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$  c) 4, 10 d)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  e) -4 f) funkcja  $f$  nie ma miejsc zerowych

3.31. a) -2, 7 b) 0, 4 c) -5 d)  $\sqrt{2}, 8$  e) 1, 3 f)  $4 + \sqrt{2}$

3.32. a) 0, 2 b)  $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$  c) 24, 0 d) 5 e) funkcja nie ma miejsc zerowych f) 1

3.33. a)  $\frac{4}{3}$  b) 0, 4 c)  $\frac{4}{5}$  d) funkcja nie ma miejsc zerowych e) 8 f) 2

3.34. a) 1 b) 0 c) 1 d) 1 e) 0 f) 2

3.35 a) 5 3 b)  $x = \frac{4}{3}$  c) 4 d) funkcja nie ma miejsc zerowych e) 8 2 f) 3 1

3.36 a) 3 9 m, browe 4 b) 3 4 m, zerowe:  $\frac{7}{3}$  1 3 15. funkcja nie ma

miejsc zerowych d)  $\Delta = 1$  m, zerowe:  $-1 \pm \frac{1}{2}$  e)  $\Delta = 20$  m, zerowe:  $5 \pm 2\sqrt{5}$ ,

$5 \pm 2\sqrt{5}$  f)  $\Delta = 76$  m, zerowe:  $\frac{5 \pm \sqrt{19}}{2}$ ,  $\frac{5 \pm \sqrt{19}}{2}$

3.37 a)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$  b)  $f(x) = 8x^2 - 96x$  c)  $f(x) = \frac{3}{5}x^2 + 6x + 15$

d)  $f(x) = 3x^2 - 25x + 20$  e)  $f(x) = 2x^2$  f)  $f(x) = x^2 + 8x + 6$

3.38 a)  $y = \sqrt{2}(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right)$  b)  $y = -3x(x+2)$  c)  $y = \frac{1}{3}(x-7)^2$

d)  $y = -\frac{1}{3}(x-4)(x-8)$  e)  $y = 7(x+2)^2$  f)  $y = \frac{2}{3}(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

3.39 a)  $f(x) = \frac{1}{2}(x+20)(x+2)$  b)  $f(x) = \frac{2}{5}x(x-4)$  c) nie istnieje

d)  $f(x) = -4(x-1)(x-9)$  e)  $f(x) = \frac{1}{5}x(x-4)$  f)  $f(x) = \frac{5}{7}x(x-7)(x+3)$

3.40 a)  $W[1; 125]$  b)  $W[0; 32]$  c)  $W[5; 100]$  d)  $W[6; 3]$

3.41 a)  $f(x) = (x+2)^2 - 9$  b)  $f(x) = 2\sqrt{3}(x+2)^2 - 3\sqrt{3}$  c)  $f(x) = 2(x-\sqrt{6})^2$

d)  $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 8$  e)  $f(x) = \frac{3}{5}(x-4)^2 - \frac{5}{5}$  f)  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}$

3.42 a)  $f(x) = (x-3)(x+1)$  b)  $f(x) = -5(x+6)^2$  c)  $f(x) = 4(x-7)(x-3)$

3.43 a)  $f(x) = -9(x+4)x$  b) nie istnieje c) nie istnieje

Wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci

ogólna

ogólna

kanoniczna

a)  $f(x) = -\frac{1}{4}(x+4)(x-1)$   $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$   $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

b)  $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 5(x-2)$   $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x + 10$   $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x + 10$

c)  $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3x$   $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3x$   $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3x$

d)  $f(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-2)$   $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2$   $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2$

3.45. wzórówka Oblicz  $f(1)$ .

3.46.  $\Delta = 4$

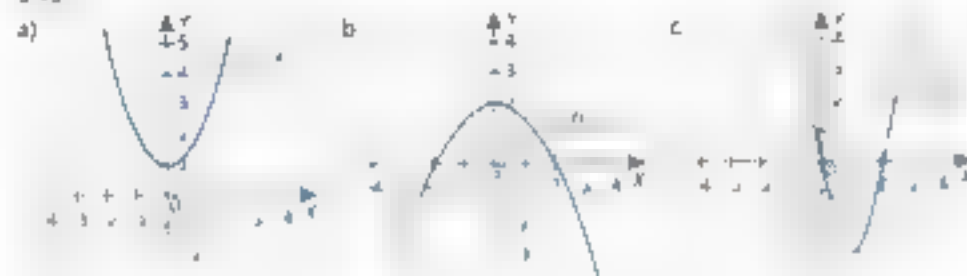
3.47. a)  $f(x) = -(x+2)(x-1)$  b)  $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{8}$  c)  $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - 5$

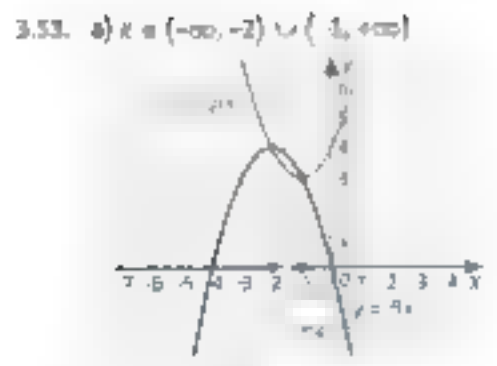
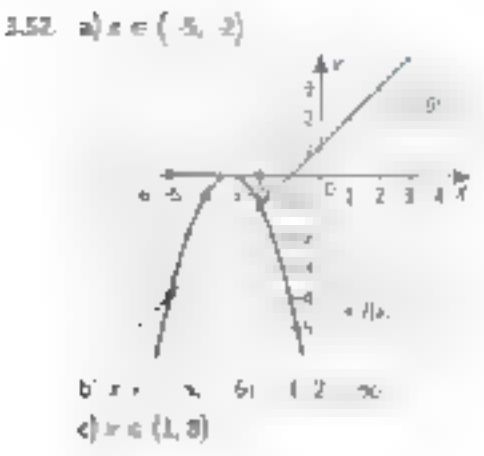
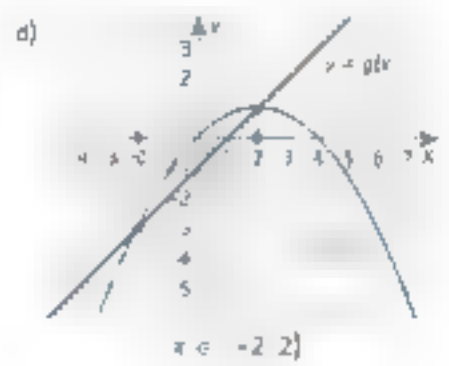
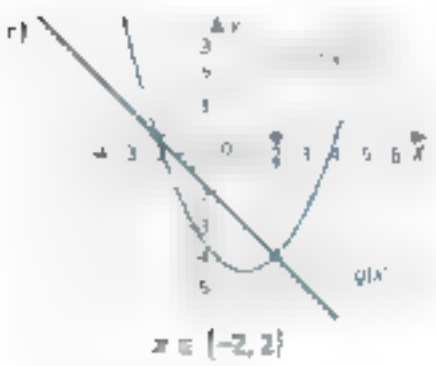
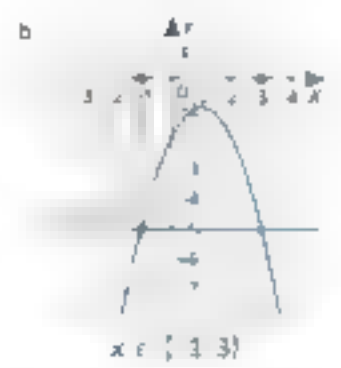
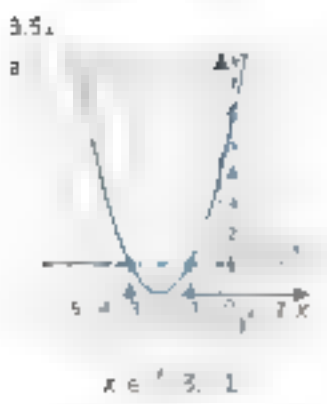
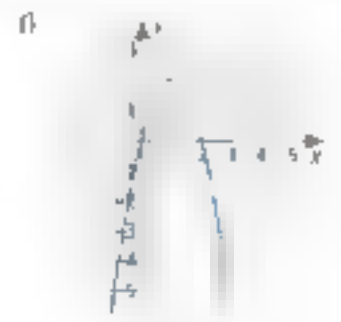
3.48.  $\Delta = 1$ ,  $k \in (-17; +\infty)$

Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych.

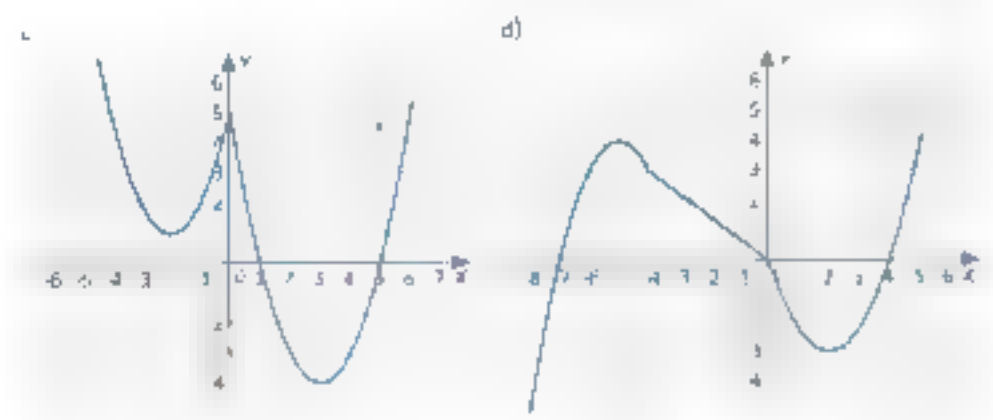
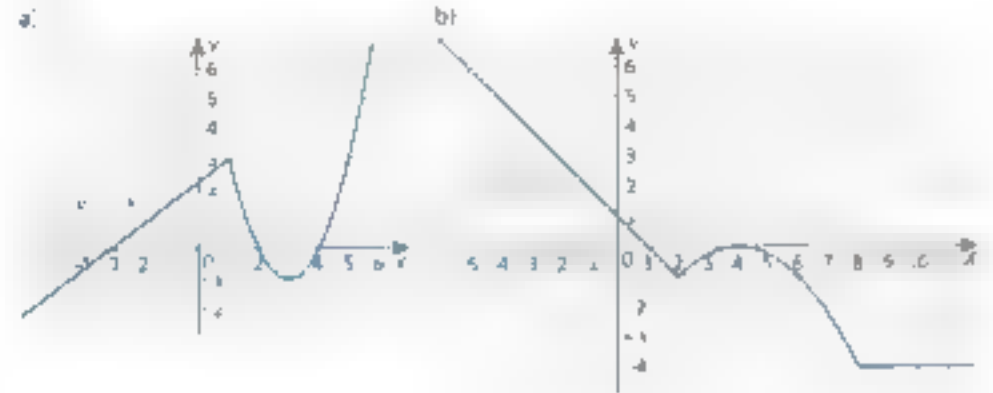
Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu

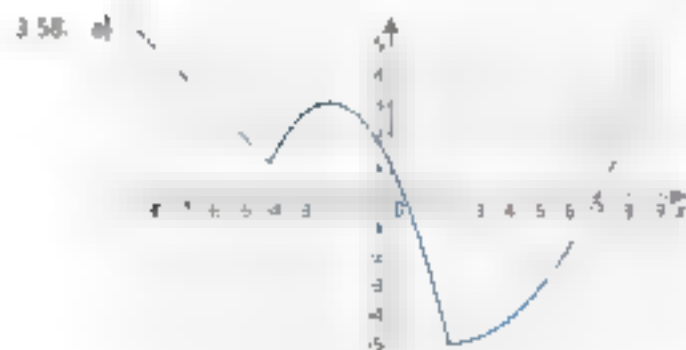
3.49





- b)  $x \in \mathbb{R}$     2  
c)  $x \in (-\infty, 0)$
- 3.54. a)  $a > 0, b < 0, c > 0$     b)  $a < 0, b > 0, c < 0$     c)  $a < 0, b < 0, c < 0$   
d)  $a > 0, b > 0, c > 0$
- 3.55. a)  $(-\infty, 1), (3, +\infty)$     b) 0, 2, 5    c)  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2) \cup (4, +\infty)$
- 3.56. b)  $2\sqrt{2}$     c) 6    d)  $x = 3$
- 3.57.





b)  $ZW = (-5, +\infty)$  c) funkcja  $f$  jest malejąca w przedziałach:  $(-\infty, -4)$ ,  $(2, 2)$ ,  
rosnąca w przedziałach:  $(-4, 2)$ ,  $(2, +\infty)$  d)  $f(-2x) / (\sqrt{2} + 1) < 0$

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej własności:

3.59.  $b = 1, c = 1$

3.60.  $b = -1, c = 18$

3.61.  $b = 4, c = 5$

3.62.  $(b = -4, c = -8)$  lub  $(b = 4, c = -8)$

3.63.  $b = 12, c = 8$

3.64.  $f(x) = -0,25x^2 + 2,5x - 4$

3.65.  $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$

3.66.  $f(x) = -3x^2 - 12x - 8$

3.67.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2}$

3.68.  $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 5$

3.69.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 30$

3.70.  $f(x) = -2x^2 + 24x + 90$

3.71.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 13x + 60$

3.72.  $f(x) = \frac{3}{7}x^2 - 2x + 2$

3.73.  $f(x) = -2(x - 4)(x + 10)$

3.74.  $f(x) = \frac{1}{3}(x - 6)(x + 3)$

3.75.  $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x + 18$

3.76.  $a = \frac{1}{2}, b = -3$

3.77.  $a = -4, b = 24$

3.78.  $a = -3, b = 10, c = 12$

Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

	a)	b)	c)	d)
wartość najmniejsza	1	-6	-2	-9
wartość największa	5	-2	0	-5

	a)	b)	c)	d)
wartość najmniejsza	2	2	0	-4
wartość największa	6	4	2	0

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
wartość najmniejsza	1	$4\frac{1}{4}$	1	$24\sqrt{3}$	$-\frac{6}{4}$	$-\frac{1}{5}$
wartość największa	2	5	$1\frac{2}{3}$	$-9\sqrt{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{11}{20}$

3.82. a) największa wartość: 105 dla argumentu 2 c) w przedziale  $[-4, 3]$  najmniejsza wartość: 96, największa wartość: 105

3.83. a) funkcja przyjmuje wartość największą dla argumentu 2 b) w przedziale  $[-5, 7]$  wartość największa: 3, wartość najmniejsza: 0

3.84.  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 11\frac{3}{4}$

3.85.  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

3.86.  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1\frac{1}{2}$

3.87.  $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

3.88.  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 18$

3.89.  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 4$

3.90.  $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x + 1$

3.91.  $f(x) = -2x^2 + 4x + 2$

3.92.  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne

3.93. 4 m

3.94. a)  $10^{100}$



3.95 a) 40 m b) 11 m/s

3.96 1 m

3.97  $100 - 50 = 50$

3.98  $50 + 15 = 65$

3.99  $16 + 9 = 25$

3.100 16 uczniów

3.101 a)  $P(x) = -x^2 + 3x + 40$ ;  $D_p = (0, 8)$  b)  $x = 1,5$  cm;  $P = 42,25$  cm<sup>2</sup>

3.102 a)  $P(x) = -8x^2 + 100x$ ;  $D_p = (0, 10)$  b)  $x = 6,25$  cm;  $P = 312,5$  cm<sup>2</sup>

3.103 15 cm

3.104 wymiary placu: 21 m x 21 m;  $P = 441$  m<sup>2</sup>

3.105 3 m x 6 m;  $P = 18$  m<sup>2</sup>

3.106 17,5 cm x 16,5 cm

3.107 1 cm x 0,7 cm

3.108 5 cm x 2 cm

3.109 a)  $P(x) = 2x^2 - 8x + 10$ ;  $D_p = (0, 4)$  b) K, L, M, N - środki boków kwadratu

3.110 1700 zł

3.111 wysokość czynszu: 1320 zł; miesięczny zysk: 217 800 zł

3.112 a) 55 b) 52

3.113  $\frac{6}{7}$  m,  $\frac{8}{7}$  m

3.114 6 cm x 6 cm

3.115 25 cm x 25 cm

3.116  $\frac{400}{x} \frac{1}{m} + \frac{100}{x} \frac{1}{m}$

3.117  $\frac{32(1-x)}{1-x} \frac{1}{m} + \frac{4(1-x)}{1-x} \frac{1}{m}$

3.118 a)  $P(x) = -\left(\frac{x+4}{8}\right)x^2 + 2x$  b)  $x \in (0, \frac{8}{3})$  c)  $\frac{8}{3}$  m

3.119  $\frac{8\sqrt{2}-6}{7}$  m

3.120 a)  $d(t) = \sqrt{5}$  b)  $d(t) = 40(t - 1)$  c)  $t = 0$  b) Odległość między samochodami będzie najmniejsza po upływie  $\frac{3}{52}$  h będzie wynosić ok. 2,8 km c) Funkcja  $y = d(t)$  przyjmuje wartość najmniejszą wtedy, gdy funkcja  $f(t) = (50 - 60t)^2 + (40t)^2$  przyjmie wartość najmniejszą. Długość jest tak dlatego, że funkcja  $y = \sqrt{x}$  jest rosnąca

## Równania kwadratowe

3.121. a)  $x = -2$  b)  $x \in \left\{0, 1\frac{3}{4}\right\}$  c) równanie sprzeczne d)  $x = 1\frac{3}{4}$

e)  $x \in \{-2, 4\}$  f)  $x = 3, 7\frac{1}{2}$

3.122 a)  $x \in \left\{\frac{5}{9}, \frac{5}{9}\right\}$  b)  $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  c)  $x \in \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$  d)  $x \in \{-2, 8\}$

e)  $x \in \{-4, 2\}$  f) równanie sprzeczne

3.123 a)  $x \in \left\{4, 1\frac{1}{2}\right\}$  b)  $x \in \left\{1\frac{2}{3}, 4\right\}$  c)  $x = \frac{2}{3}$  d) równanie sprzeczne

e)  $x \in \left\{0, \frac{4}{49}\right\}$  f)  $x = 1\frac{1}{4}$

3.124. a)  $x \in \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$  b)  $x \in \left\{1, 1\frac{1}{2}\right\}$  c) równanie sprzeczne d)  $x = \frac{2}{3}, 0$

e)  $x = 2, \frac{1}{5}$  f)  $x = \frac{1}{2}$

3.125 a)  $x \in \{-3, 5\}$  b)  $x \in \left\{1\frac{2}{5}, 0\right\}$  c)  $x \in \{3, 1\}$  d)  $x \in \{-1, 9\}$

e)  $x \in \{-5, -1\}$  f)  $x \in \{-2, 1\}$

3.126. a)  $x \in \{1, -5\}$  b)  $x \in \{-1, 0\}$  c)  $x \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$  d)  $x \in \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$

e)  $x \in \left\{-3\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$  f)  $x \in \left\{\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

3.127. a)  $x \in \{-1, 1\}$  b) równanie sprzeczne c)  $x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$  d)  $x \in \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$

e)  $x = \frac{1}{3}, 1$  f)  $x = 5$

3.128. a)  $x = 7, \frac{3}{4}$  b)  $x \in \left\{5, \frac{1}{2}\right\}$  c) równanie sprzeczne d)  $x = 4, \frac{4}{3}$

e)  $x \in \{5, 0\}$  f)  $x = 1$

3.129. a)  $x \in \left\{5, \frac{7}{3}\right\}$  b) równanie sprzeczne c)  $x \in \left\{2\sqrt{6}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$

d)  $x \in \left\{\frac{5}{3}, 4\right\}$  e)  $x = \frac{1}{3}, 1$  f)  $x = 1\frac{1}{3}, 1$

$$3.130 \text{ a) } x = \frac{1}{4} \frac{1}{4} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{5} \frac{1}{5} \quad d) x = \frac{6}{2} \frac{1}{2}$$

$$e) x = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{21}}{2} \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \quad f) x = 2$$

$$3.131 \text{ a) równanie sprzeczne} \quad b) x = \frac{2}{3} \frac{1}{3} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \quad d) x = \frac{1}{2} \frac{12}{2} \quad e)$$

$$f) x = \frac{1}{3} \quad \text{równanie sprzeczne}$$

$$3.132 \text{ a) } x \in \{0, 1\} \quad b) x \in \left\{-1, \frac{2}{3}\right\} \quad c) x \in \{-5-\sqrt{5}, -5+\sqrt{5}\} \quad d) x = 3$$

$$3.133 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{3}{2} \frac{1}{2}$$

$$3.134 \text{ a) } x = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{4} \frac{1}{4} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad d) x = \frac{1}{4} \frac{1}{4}$$

$$3.135 \text{ a) } x = \frac{8}{2} \frac{1}{2}$$

Równania prowadzące do równań kwadratowych

$$3.138 \text{ a) } x \in [-4, 0, 4] \quad b) x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} \quad c) x \in [-1, 1] \quad d) \text{równanie sprzeczne}$$

$$e) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad f) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$3.139 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad e) \text{równanie sprzeczne} \quad f) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$3.140 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad e) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad f) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$3.141 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) \text{równanie sprzeczne} \quad d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$e) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad f) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$3.142 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad d) \text{równanie sprzeczne}$$

$$e) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad f) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$3.143 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad e) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad f) \text{równanie sprzeczne}$$

$$3.144 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$3.145 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$e) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad \text{wskazówka } x = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$$

$$3.146 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) \text{równanie sprzeczne} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

Nierówności kwadratowe

$$3.147 \text{ a) } x \in \mathbb{R} \quad b) x = 0 \quad c) x \in \mathbb{R} \quad d) x \in \mathbb{R} \quad e) x \in \mathbb{R}$$

$$\text{sprzeczna} \quad f) x \in \{-\infty, 0\} \cup \{1, +\infty\}$$

$$3.148 \text{ a) } x \in [-4, 2] \quad b) x \in \mathbb{R} \quad c) x \in \mathbb{R} \quad d) x \in \mathbb{R} \quad e) x \in \mathbb{R}$$

$$f) x \in \mathbb{R}$$

$$3.149 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$e) x \in \mathbb{R} \quad f) \text{nierówność sprzeczna} \quad g) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$3.150 \text{ a) } x \in \mathbb{R} \quad b) x = 0.5 \quad c) x = 3 \frac{1}{2} \quad d) x = 2 \frac{1}{2} \quad e) x \in \mathbb{R} \quad f) \text{nierówność}$$

$$\text{sprzeczna}$$

$$3.151 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$e) \text{nierówność sprzeczna} \quad f) x \in \mathbb{R} \quad g) x \in (-1, 2)$$

$$3.152 \text{ a) nierówność sprzeczna} \quad b) x \in \mathbb{R} \quad c) x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \quad d) x = 2.5$$

$$e) x = 0.2 \quad f) x \in \mathbb{R}$$

$$3.153 \text{ a) } x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad b) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad c) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad d) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$e) x = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \quad f) \text{nierówność sprzeczna}$$

$$3.154 \text{ a) } x = 3 \quad b) \text{nierówność sprzeczna} \quad c) x \in \mathbb{R} \quad d) x \in (0, 10) \quad e) x \in (-2, 3)$$

$$f) \text{nierówność sprzeczna}$$

$$3.155 \text{ a) } x \in (-1, 4) \quad b) x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (5, +\infty) \quad c) x \in \frac{1}{3} \frac{1}{3} \quad d) x = 3 \quad e) x \in \mathbb{R}$$

$$f) \text{nierówność sprzeczna}$$

$$3.156 \text{ a) } x \in (-\infty, 2] \cup [1, \infty) \quad \text{b) } x \in [3, 1] \quad \text{c) } x \in [29, 1 \cup \infty)$$

$$\text{d) } x \in \mathbb{R} \setminus 2^{\frac{1}{2}}$$

$$3.157 \text{ a) } x \in \{1, 4\} \quad \text{b) } x \in (-\infty, 1) \cup 2 \cup \infty \quad \text{c) } x \in (-\infty, 4) \cup 0 \cup \infty \quad \text{d) } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{e) } x \in (-4, 1) \cup x \in \mathbb{R} \setminus 3,$$

$$3.159 \text{ a) } 8$$

$$3.160 \text{ a) } 2\frac{2}{3}$$

$$3.161 \text{ a) } 3\frac{4}{5}$$

$$3.162 \text{ A} = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \quad \text{B} = (-\infty, 4) \cup (1, +\infty) \quad \text{A} \cap \text{B} = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \quad \text{A} \cup \text{B} = \mathbb{R} \setminus [1, 5]$$

$$3.163 \text{ A} = [0, 4] \quad \text{B} = [2, 10] \quad \text{A} \cap \text{B} = [2, 4] \quad \text{A} \cup \text{B} = [0, 10]$$

$$3.164 \text{ a) } D = \mathbb{R} \quad \text{b) } D = (0, 2) \quad \text{c) } D = (-\infty, -8) \cup (1, +\infty) \quad \text{d) } D = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{e) } D = \{3, 1\} \quad \text{f) } D = \mathbb{R} \setminus \frac{1}{5}$$

$$3.165 \text{ a) } m \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \quad \text{b) } m \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \quad \text{c) } m \in [1, 1] \cup [2, 4]$$

$$\text{d) } m \in (-4, 3) \cup (2, 1)$$

$$3.166 \text{ a) } m \in (-4, 4) \quad \text{b) } m = -6 \quad \text{c) } m \in (-3, 5) \quad \text{d) } m \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$$

### Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

$$3.167 \text{ } 16, 14 \text{ lub } 16, 12$$

$$3.168 \text{ } -12, 10, -8 \text{ lub } 8, 10, 12$$

$$3.169 \text{ } 9, 7 \text{ lub } 5, 7, 9$$

$$3.170 \text{ } 354$$

$$3.171 \text{ } 23 \text{ lub } 32$$

$$3.172 \text{ } 141$$

$$3.173 \text{ } 18$$

$$3.174 \text{ } 6$$

$$3.175 \text{ } 5 \text{ klas}$$

$$3.176 \text{ } 30 \text{ m}$$

$$3.177 \text{ } 0,54 \text{ m} \quad 0,96 \text{ m}$$

$$3.178 \text{ } 2,5 \text{ cm}$$

$$3.179 \text{ } 0,6 \text{ km} \quad 0,8 \text{ km}$$

$$3.180 \text{ } p = 10$$

$$3.181 \text{ } 32 \text{ cm} \times 32 \text{ cm} \text{ lub } 41\frac{1}{2} \text{ cm} \times 24\frac{6}{7} \text{ cm}$$

$$3.182 \text{ w I beczce } 120 \text{ litrów w cenie } 20 \text{ zł za litr, w II beczce } 80 \text{ litrów w cenie } 30 \text{ zł za litr}$$

$$3.183 \text{ } 16\text{h}, 25 \text{ lat}$$

$$3.184 \text{ } 5, 1 \text{ lub } 8, 2$$

$$3.185 \text{ a) } P \mid n = \frac{5}{4} \quad \text{b) } a = 1 \quad \text{c) } a = (4, 6)$$

$$3.186 \text{ } 63, 54, 45, 36, 27$$

$$3.187 \text{ } 5 \text{ zł}$$

$$3.188 \text{ } 1 \text{ m}$$

$$3.189 \text{ } 3 \text{ cm}, 4 \text{ cm}$$

$$3.190 \text{ } 4\frac{8}{13}$$

Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego

$$3.191 \text{ a) } x \in \mathbb{R} \quad \text{b) } x = 4 \quad \text{c) } x = \frac{1}{3} \quad \text{d) } x = 7 \quad \text{e) } x \in \{3, 4\} \quad \text{f) } x = \frac{1}{2}$$

$$3.192 \text{ a) } x = 3 \quad \text{b) } x = 1 \quad \text{c) } x = \sqrt{2} \quad \text{d) równanie sprzeczne} \quad \text{e) } x \in [\sqrt{6}, \sqrt{6}]$$

$$\text{f) } x \in [-1, 1]$$

$$3.193 \text{ a) } x = 0 \quad \text{b) } x = 4 \quad \text{c) } x = 7 \quad \text{d) równanie sprzeczne} \quad \text{e) } x = 1$$

$$\text{f) } x \in [-2, 2]$$

$$3.194 \text{ a) } x \in \{2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\}, \text{ wstawiając równanie doprowadź do postaci}$$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{podstaw } t = \sqrt{x - 4}$$

$$\text{b) } x = 2 - \sqrt{2} \quad \text{c) } x = 2 + \sqrt{2} \quad \text{podstaw } t = \sqrt{x - 4} \quad \text{d) } x = 4 \quad \text{e) } x = 3 \quad \text{f) } x = 1$$

$$\text{g) } x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2} \quad \text{h) } x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2} \quad \text{i) } x = \frac{\sqrt{145} - \sqrt{65}}{2} \quad \text{j) } x = \frac{\sqrt{145} + \sqrt{65}}{2}$$

$$3.195 \text{ a) } x = 2 \quad \text{b) } x \in \{1, 9\} \quad \text{c) } x = 4 \quad \text{d) } x \in \{2, 14\} \quad \text{e) } x \in \{2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}\}$$

$$\text{f) } x = 4$$

$$3.196 \text{ a) } x \in [2, 6] \quad \text{b) } x \in [3, 6] \quad \text{c) } x \in [8, 12] \quad \text{d) } x \in [10, 9] \quad \text{e) } x \in (-\infty, 1)$$

$$\text{f) } x \in (1, \sqrt{5})$$

$$3.197 \text{ a) } x \in (-\infty, 0) \quad \text{b) } x \in \left[\frac{3+2}{2}, 3\right] \quad \text{c) } x \in (-\infty, 7) \cup (1, \infty)$$

$$\text{d) } x = 3 \quad \text{e) } x = 2 \quad \text{f) } x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

$$3.198 \text{ a) } x = 2 \quad \text{b) } x = 4 \quad \text{c) } x = 7 \quad \text{d) } x = 2 \quad \text{e) } x = 2 \quad \text{f) } x = 2$$

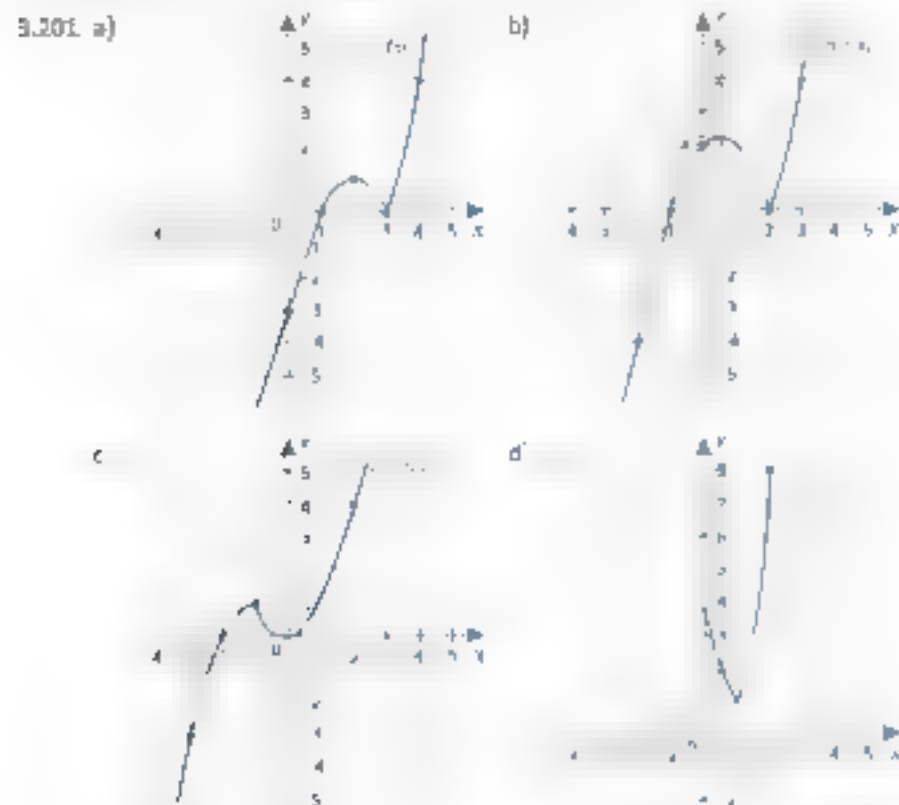
$$\text{g) } \text{nierówność sprzeczna} \quad \text{h) } x \in (-4, 4)$$

$$3.199 \text{ a) } x \in (-\infty, -3) \cup \{1\} \quad \text{b) } x \in (3, +\infty) \quad \text{c) } x \in (-10, -8) \cup (8, 10)$$

$$\text{d) } x \in [-\sqrt{6}, 2] \quad \text{e) } x \in [4, 5] \quad \text{f) } x \in [1, 10] \quad \text{g) } 0, 1$$

- 3.200. a)  $x \in (3, 5)$  – podstaw  $t = \sqrt{x+1}$ , wówczas  $t^2 = x+1$  oraz  
 $5+x+4\sqrt{x+1} = (x+1) + 4\sqrt{x+1} + t^2 - 4t + 4 = (t+2)^2$ , analogicznie  
 $10 = 6 + x = 6 + t^2 - 1 = 5 + t^2 = (t+2)^2$ , otrzymujemy równanie  
 $t^2 - 4t + 9 = 0$  skąd  $t = 2 \pm \sqrt{5}$  b)  $x = 4$  c)  $x \in \mathbb{R}$  d) równa  
nie sprzeczne

Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną



Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną

- 3.211. a)  $x = 1, 3, 7$  b)  $x \in (-5, -1) \cup (1, 5)$  c) równanie sprzeczne d)  $x = -6, 2$   
e)  $x = 1 \pm \sqrt{2}$  f)  $x = \sqrt{17} - 2, 0, 1 \pm \sqrt{7}$
- 3.212. a)  $x = 3, 3$  b)  $x \in [0, 2] \cup [4, 6]$  c)  $x = 1 \pm \sqrt{0}$  d)  $x = 4$   
e)  $x = 2$  f)  $x = \mathbb{R}$
- 3.213. a)  $x \in \{-2, 0\}$  b) równanie sprzeczne c)  $x \in \{-3, 0, 2, 5\}$  d)  $x \in \{-2, 2\}$   
e)  $x = 5, 0, 3$  f)  $x = 1 \pm 3, 5$

- 3.214. a)  $x = -8, 5, 2$  b)  $x \in [-2, 7]$  c)  $x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$  d)  $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$

e)  $x = 0, 4, 1$  f)  $x = 1, 2, 3$

- 3.215. a)  $x = 3, 1$  b)  $x = 0, 4, 8$  c)  $x = 1, 2, 4$  d)  $x = 1, 4$   
e)  $x = 3, 3$  f)  $x = 1$

- 3.216. a)  $x = 1 \pm \sqrt{3}, 2 \pm \sqrt{2}$  b) równanie sprzeczne c)  $x = \frac{4}{2}$

d)  $x \in [-5, -2] \cup [3, 5]$  e)  $x = \sqrt{4} \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{5}$  f)  $x \in [-3, 3]$

- 3.217. a)  $x \in (-3, 2) \cup (-1, 0)$  b)  $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$   
c)  $x \in (-\infty, 4) \cup (3, 3)$  d)  $x = 0, 8$  e)  $x = 1, 4$   
f)  $x = 1, 2 \pm \sqrt{3}, 7$

- 3.218. a)  $x = 2, 2$  b)  $x = 2, 2$  c)  $x = 3, 3$   
d)  $x \in (-\infty, 3) \cup \{0\} \cup (5, +\infty)$  e)  $x \in (-\infty, 5) \cup (0, +\infty)$   
f)  $x \in (-\infty, 4) \cup \{0\} \cup (4, +\infty)$

- 3.219. a)  $x = 5, 2$  b)  $x = 2, 5$  c)  $x = 3, 0$  d)  $x = 10, 3$  e)  $x = 2, 0$  f)  $x = 1, 3$   
g)  $x = 8$  h)  $x = 7$  i)  $x = 5, 1$  j)  $x = 1, 2 \pm \sqrt{3}$

- 3.220. a)  $x \in (3, 3\sqrt{2}, 3) \cup (3, 3+3\sqrt{2})$  b)  $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (3, +\infty)$

c)  $x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$

d)  $x \in (-\infty, 0) \cup (5, 7) \cup (3, 4)$  e)  $x = 2, 1 \pm 3, 4$  f)  $x = 2, 1 \pm 2, 3$

Wzory Viete'a

- 3.221. a) ujemne b) jedno dodatnie drugie ujemne c) dodatnie d) ujemne

- 3.222. a) 3, 2 b) 2, 4 c) 1, 7 d) 2, 10 e) 5, 1 f) 9

- 3.223. a)  $b = 1$  c)  $2, 5$  b)  $a = 2$  d)  $1, 7$  e)  $a = 0$  f)  $2, 0$  g)  $b = 1$

- 3.224. a)  $a = 0$  b)  $0$  c)  $0$  d)  $0$  e)  $0$  f)  $0$  g)  $0$  h)  $0$  i)  $0$  j)  $0$

k)  $0$  l)  $0$  m)  $0$  n)  $0$  o)  $0$  p)  $0$  q)  $0$  r)  $0$  s)  $0$

- 3.225.  $(x_1 = 1, x_2 = 5, p = 12)$  lub  $(x_1 = -1, x_2 = -5, p = 12)$

- 3.226.  $x \in [0, 3]$  a)  $0 = 0$  b)  $x \in [-2, 4]$  c)  $0 = 0$

3.227. a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{12}$

3.228. a)  $\frac{5\sqrt{2}}{4}$  b)  $\frac{1}{8}$

3.229.  $\frac{6\sqrt{2}}{5}$

3.232.  $p = -4\frac{1}{4}$  q =  $3\frac{3}{4}$

3.233 a)  $p = 15$  d)  $1$  lub  $p = 2$  g)  $3$

3.234 f)  $x = 2$  b)  $x = 3$

3.235 f)  $x = 1$  a)  $2$  g)  $9$

3.236 f)  $x = \frac{1}{2}$  a)  $x = 4$  b)  $x = 7$

3.237 f)  $x = \frac{6}{11}$  a)  $x = \frac{18}{11}$  b)  $x = \frac{6}{11}$  albo f)  $x = 6$  a)  $18$  b)  $6$

3.238 a)  $x = 2$  b)  $x = 6$  c)  $x = 10$  d)  $x = 2\sqrt{10}$  e)  $x = 2\sqrt{10} + 4$  f)  $x = 2$  g)  $x = 3$  h)  $x = 2$  i)  $x = 3$  j)  $x = 2$  k)  $x = 3$  l)  $x = 2$  m)  $x = 3$  n)  $x = 2$  o)  $x = 3$  p)  $x = 2$  q)  $x = 3$  r)  $x = 2$  s)  $x = 3$  t)  $x = 2$  u)  $x = 3$  v)  $x = 2$  w)  $x = 3$  x)  $x = 2$  y)  $x = 3$  z)  $x = 2$

3.239 c)  $-1$ , odpowiedź Skorzystaj z zależności  $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$  i oblicz  $|x_1 - x_2|$

3.240. odpowiedź Uzasadnij, że jeśli  $b > 1$ , to  $\Delta > 0$ ; następnie oblicz  $|x_1 - x_2|$

3.241. odpowiedź Ponieważ  $\Delta = a^2 + 8 > 0$ , więc funkcja  $f$  ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8}}{2}, x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 8}}{2}$$

## Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

3.242. a)  $m \in \mathbb{R}$  b)  $m \in (-2, 2)$  c)  $m \in (-2, 2)$  d)  $m \in (-2, 2)$

3.243. a)  $k \in (-3, 3)$  b)  $k \in (-3, 3)$  c)  $k \in (-3, 3)$  d)  $k \in (-3, 3)$

$$k \in (-3, 3) \Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - k}$$

3.244. a)  $g(p) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } p \in (-3, \frac{1}{2}, 1, 5) \end{cases}$

$$0, & \text{jeśli } p \in (-3, \frac{1}{2}, 1, 5)$$

$$2, & \text{jeśli } p \in (-3, \frac{1}{2}, 1, 5)$$

b)  $g(p) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } p \in (-3, \frac{1}{2}, 1, 5) \end{cases}$

$$0, & \text{jeśli } p \in (-3, \frac{1}{2}, 1, 5)$$

3.245. a)  $m \in (-3, 3)$  b)  $m \in (-3, 3)$  c)  $m \in (-3, 3)$  d)  $m \in (-3, 3)$

3.246. a)  $k \in (0, 1)$  b)  $k \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$

3.247.  $k \in (-\infty, -\frac{4}{3})$

3.248. a)  $k \in (-\infty, \frac{5}{9})$  b)  $k \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

3.249. a)  $k \in (\sqrt{2}, 2)$  b)  $k \in (3, \frac{1}{2})$

3.250. a)  $m \in (2, 3)$  b)  $m \in \frac{3}{4}$

3.251. a)  $k \in (-1, \frac{3}{5}, 0) \cup (2, +\infty)$  b)  $k \in (-7, 1)$

3.252.  $k \in (-1, 1)$

3.253.  $k \in (-1, 1)$

3.254.  $k \in (-1, 1)$

3.255.  $k \in (-1, 1)$

3.256.  $k \in (-1, 1)$

3.257.  $k \in (-1, 1)$

3.258. a)  $m \in (-1, 1)$  b)  $m \in (-1, 1)$

3.259.  $k \in (-5, -1) \cup (3, 4)$

3.260.  $p \in (-5, -3) \cup (3, 4)$

3.261.  $k \in (-1, 1)$  Lewą stronę równości doprowadź do postaci  $3x^2 - 4x + k = 0$

3.262.  $k \in (-1, 1)$

3.263.  $k \in (-1, 1)$

3.264.  $k \in (-1, 1)$

3.265.  $k \in (-1, 1)$

3.266.  $p \in (-5, -3) \cup (3, 4)$

3.267. a)  $x \in (-1, 1)$  b)  $k \in (-1, 1)$

3.268.  $k \in (-1, 1)$

3.269. a)  $k \in (-1, 1)$  Zauważ, że  $x_1 + x_2 = 2$  więc para  $(x_1, x_2)$  jest rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases}$  Ponadto  $k = x_1x_2$  sprawdź, że dla wyznaczonej

liczby  $k$  wyróżnik jest dodatni.

3.270. a)  $k \in (-1, 1)$

3.271. a)  $k \in (-1, 1)$

3.272. a)  $k \in (-1, 1)$

3.273. a)  $k \in (-1, 1)$

3.274. a)  $k \in (-1, 1)$

3.275. a)  $k \in (-1, 1)$

3.276. a)  $k \in (-1, 1)$

3.277. a)  $k \in (-1, 1)$

3.278. a)  $k \in (-1, 1)$



równania  $\frac{4a+2}{3} \cdot \frac{2a+1}{3} = a^2 + 2$ ; sprawdzi, że wówczas  $\Delta > 0$ .

3.270 a)  $x = \sqrt{2}$  b) ni  $2, 2, 3, 3$

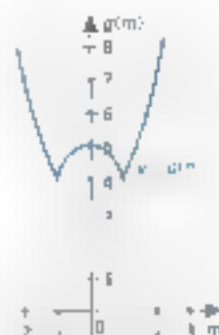
3.271.  $m \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

3.272.  $m \in \{1, 3\}$

3.273 a)  $x = 0, 3$  b)  $p = 0, 1$

3.274.  $g(m) = \begin{cases} m^2 + 3, & \text{jeśli } m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ m - 5, & \text{jeśli } m \in [-1, 1] \end{cases}$

wskazówka. Zauważ, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji  $f$  są skierowane do góry, więc dla  $x_0$  funkcja  $f$  przyjmuje tylko wartości największą. Zatem w przedziale  $[-1, 1]$  funkcja  $f$  przyjmuje największą wartość równą:  $+f(1)$  gdy  $f(1) = f(-1)$  lub  $+f(-1)$  gdy  $f(1) < f(-1)$ .



$x = 4$  jeśli  $k = -4$

3.275.  $g(k) = -0,25k^2 - k$ , jeśli  $k \in (-4, 0)$   
 $-k$ , jeśli  $k \in [0, +\infty)$

Wybierz  $R$  funkcja  $f$  dla  $x_0$  gdzie  $x_0 = \frac{k}{2}$  przyjmuje wartość najmniejszą, równą  $-0,25k^2 - k$ . Jeśli  $x_0 \in (0, 2)$ , czyli gdy  $k \in (-4, 0)$ , to funkcja  $f$  przyjmuje w przedziale  $(0, 2)$  najmniejszą wartość równą  $-0,25k^2 - k$  jeśli  $k \in (-4, 0)$ . Jeśli  $k \in [0, +\infty)$ , to funkcja  $f$  przyjmuje w przedziale  $(0, 2)$  wartość  $f(0)$ , gdy  $f(0) \leq f(2)$ , albo liczbę  $f(2)$ , gdy  $f(2) < f(0)$ .

3.276.  $m = \frac{1}{2}$

3.277.  $m = 4, \frac{3}{4}$

3.278.  $m \in (-\infty, -3\sqrt{5}) \cup (3\sqrt{5}, +\infty)$

3.279. wskazówka. Narysuj wykres odpowiedniej funkcji

a) 0 rozwiązań, jeśli  $m \in (-\infty, 0)$ ; dwa rozwiązania, jeśli  $m \in \{0\} \cup (4, +\infty)$ ; trzy rozwiązania, jeśli  $m = 4$ ; cztery rozwiązania, jeśli  $m \in (0, 4)$

b) 0 rozwiązań, jeśli  $m \in (-\infty, 0)$ ; dwa rozwiązania, jeśli  $m \in (0, 1)$ ; trzy rozwiązania, jeśli  $m = 1$ ; cztery rozwiązania, jeśli  $m \in (1, 4)$

c) dwa rozwiązania, jeśli  $m \in (-\infty, -1)$ ; trzy rozwiązania, jeśli  $m \in \{-1\}$ ; cztery rozwiązania, jeśli  $m \in (-1, 1)$

d) 0 rozwiązań, jeśli  $m \in (0, +\infty)$ ; dwa rozwiązania, jeśli  $m \in (-\infty, -1) \cup \{0\}$ ; trzy rozwiązania, jeśli  $m = -1$ ; cztery rozwiązania, jeśli  $m \in (-1, 0)$

e) 0 rozwiązań, jeśli  $m = 3$ ; jedno rozwiązanie, jeśli  $m = 5$ ; dwa rozwiązania, jeśli  $m \in (3, +\infty)$

f) 0 rozwiązań, jeśli  $k \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ ,

dwa rozwiązania, jeśli  $k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

trzy rozwiązania, jeśli  $k \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ,

cztery rozwiązania, jeśli  $k \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ,

3.280. a)  $x \in \{-1, -\frac{3}{4}\}$  b)  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

3.281.  $m \in (-\infty, -10) \cup (6, +\infty)$

3.282.  $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

3.283.  $k \in [0, +\infty)$ . Narysuj wykres funkcji  $y = x^2 + k$  i zaznacz przedział  $[2, 2]$  na osi  $OY$  pamiętając, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

3.284.  $p \in (-1, 0) \cup (4, 5)$

3.285.  $a \in [-1, +\infty)$ ,  $a \neq 0$ . Niech  $t = x$ . Dane równanie ma cztery rozwiązania, jeśli równanie  $t^4 - (a+1)t^2 + 1 = 0$  ma dwa rozwiązania dodatnie.

3.286.  $p \in (-1, 0) \cup (3, 4)$

3.287. jeśli  $p = -1$ , to  $x \in \{-1, 0, 1\}$ ; jeśli  $p = 1$ , to  $x \in \{-1, 0, 1\}$  wskazówka. Niech  $t = |x|$ . Dane równanie ma trzy rozwiązania, jeśli równanie  $t^4 + 2(p-3)t^2 + p^2 - 1 = 0$  ma dwa rozwiązania, z których jedno jest równe 0, a drugie jest dodatnie.

3.288.  $m = -2$ ,  $-4$ ,  $-\frac{1}{2}$ . Niech  $t = x$ . Dane równanie ma dwa rozwiązania, jeśli równanie  $2t^4 - mt^2 + m - 2 = 0$  ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków albo tylko jedno rozwiązanie dodatnie.

Test sprawdzający do rozdziału 3.

Numer zadania	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Odpowiedź	D	A	C	C	B	A	A	D	A	A	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

13. a)  $x = -10$  b)  $x \in \left\{\frac{3}{5}, 2\right\}$  c)  $x \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$  d)  $x \in \{-1, 0, 3, 4\}$

14. a)  $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  b)  $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  c)  $x \in \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$  d)  $x = 11$

15. najmniejsza wartość 3; największa wartość 21

16. a)  $f(x) = 0,5(x-1) + 4\frac{1}{2}$  b)  $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22$
17. a)  $a = 3$  b)  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$  c)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
18. a) postać kanoniczna  $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$  postać kanoniczna  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$   
b)  $f$  rosnąca w przedziale  $[-1, +\infty)$   $f$  malejąca w przedziale  $(-\infty, -1]$  c)  $0, 2$
19. a)  $x = -4$  b)  $a = \frac{1}{4}$  b)  $2, c = 3$  c)  $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$
20. ojciec ma 64 lata, córka 36 lat
21. 1,5
22. co najmniej 11 osób
23. 7, 64 cm
24. a)  $z(x) = 8x + 8$   $K(x)$ , skąd  $Z(x) = 4x + 88x + 84$  gdzie  $x = 2$  18; co naj-  
mniej, 2 koszułki b) 11 koszułki; dzienny zysk wyniesie wówczas 400 zł
25.  $\frac{50}{49} m, \frac{48}{49} m$
31. a)  $x = -1$  b)  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  c)  $x = 2$  d)  $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
32.  $x \in (-\infty, -5) \cup (-4, -1) \cup (1, 4) \cup (5, +\infty)$
33. a)  $x \in (-\infty, -7) \cup (-5, 5) \cup (7, +\infty)$  b)  $x = 3$
34. a)  $x = 1$  b)  $x = 2$  c)  $x = 3$
35.  $f(x) = \frac{1}{3}, g(x) = 2$
36.  $\{p = -1 \wedge q = 3\}$  lub  $\{p = 3 \wedge q = -1\}$
37.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$  lub  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$  lub  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$  lub  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
38.  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x = -\frac{3}{5} \\ 2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, \frac{3}{5}) \cup (1, +\infty) \end{cases}$
39.  $a \in (-\sqrt{5}, 1) \cup (1, \sqrt{5})$
40.  $m \in (\frac{1}{2}, 1)$
41.  $p = -2$  lub  $p = 3$

44.  $\sigma = 1\frac{1}{3}$
45.  $t \in (-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$
46.  $a \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
47.  $\sigma = 1\frac{1}{3}$
48.  $p \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

#### 4. Geometria płaska – okręgi i koła

Powtórzenia wiadomości z geometrii z klasy 1.

- 4.1.  $36^\circ, 144^\circ$
- 4.2. a)  $245^\circ$  b)  $220^\circ$
- 4.3.  $\angle ACB = 94^\circ$
- 4.4.  $\beta = 143$
- 4.5. a)  $35^\circ, 67^\circ, 78^\circ$  b)  $52^\circ, 75^\circ, 53^\circ$
- 4.6.  $51^\circ$
- 4.8. b)  $\alpha = 108^\circ$  Poprowadź prostą AB – oblicz miarę kąta przyległego do kąta CBA
- 4.9. a)  $x = 2,4$  b)  $x = 9$  c)  $x = 4,5$  d)  $x = 4,5$  e)  $x = 1,2$  f)  $x = 4,5$
- 4.10. a)  $2\frac{2}{3}$  cm b) 8,4 dm c) 9 dm d) 9 cm
- 4.11. a) tak b) tak c) nie d) nie
- 4.12. a)  $\sigma = 2,6$  b)  $\sigma = 1\frac{1}{3}$  c)  $\sigma = 1\frac{1}{3}$
- 4.13.  $c \in \{7, 11\}$
- 4.14. a) 9 b) 9
- 4.15. 6 cm, 9 cm, 12 cm
- 4.16. 7, 14, 21,  $|AB| = 28$
- 4.17.  $28^\circ, 28^\circ, 124^\circ$
- 4.18. a)  $8 + 4\sqrt{3}$  b)  $12 + 6\sqrt{3}$
- 4.20. a)  $2\sqrt{2}$  cm  $2\sqrt{2}$  cm 4 cm b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}m - \frac{3}{\sqrt{2}}m$
- 4.21. b) 18,9 cm
- 4.22. b) 37,6 cm

4.23. a) 9 cm, 12 cm, 15 cm b) 7,5 cm

4.24. a) rozwartokątny b) 8 cm,  $9\frac{15}{17}$  cm, 16,8 cm4.25. a) 12 cm b)  $\frac{3\sqrt{97}}{2}$  cm c) 7,5 cm4.26. a)  $\sqrt{3}$ ,  $2\sqrt{3}$  b)  $0,5\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}$ 4.27. a) 3 cm, 4 cm i 5 cm. Zauważ, że trójkąt jest prostokątny. Poprowadź ze środka przeciwprostokątnej odcinek prostopadły do przyprostokątnych, wyznacz ich długość i skorzystaj z wniosku z twierdzenia Talesa b) 5 cm,  $2\sqrt{13}$  cm,  $\sqrt{73}$  cm4.28. 15 cm,  $\frac{3\sqrt{59}}{2}$  cm,  $\frac{3\sqrt{89}}{2}$  cm

4.29. a) ... Poprowadź przez punkt D prostą równoległą do półprostej CE

4.30. a) ... Wykaż, że  $\angle ADC = 90^\circ$ . Następnie uzasadnij, że  $\angle ADC = \angle ADB$ 4.31. **wskazówka** Wykaż, że  $\triangle PDC = \triangle ADB$ 

4.32. 10 cm

4.33. a) 20%

4.34. b.  $\frac{5}{3}$ 4.35. **Wskazówka**

4.36. (2,5 cm, 7,5 cm) oraz (2 cm, 6 cm)

4.37. a) 6 cm, 3,6 cm, 3,6 cm b) 7,2 cm

4.38. 40 cm

4.39. 7,5 cm, 10 cm

4.40. b) nie

4.41. **wskazówka** Wykaż, że  $\angle C_1CC_2 = \frac{\angle A + \angle B}{2}$ 4.43. **wskazówka** Niech  $|BC| = 2y$ ,  $|AB| = 4x$ . wyraż  $y$  w zależności od  $x$ **Okrag. Położenie prostej i okręgu**

4.45. a) 3 cięciwy, 6 łuków b) 6 cięciw, 12 łuków

4.47. 3,5 cm

4.48. 7 cm

4.49. 30 cm

4.50.  $26\pi$  cm

4.51. a) 10% cm b) 6 cm

4.52. a) 17% b) 64% c) 50% d) 12% e) 100% f) 28%

4.53. a) prosta k jest rozłączna z okręgiem o b) prosta k jest sieczną okręgu o c) prosta k jest styczną okręgu o d) prosta k jest styczną do okręgu o

4.55. 34 cm

4.56.  $|FC| = 12$  cm4.57. a) 135 b)  $\pm 10$  c) 80 d) 19

4.58. 2 cm

4.59. 20 cm; **wskazówka** Skorzystaj dwukrotnie z twierdzenia Talesa.4.61. a)  $a < 3$ ;  $a = 3$ ; jeśli  $a > 3$  to prosta jest sieczną okręgu, jeśli  $a = 3$  to prosta jest styczna do okręgu, jeśli  $a > 7$ , to prosta jest rozłączna z okręgiemb)  $a \in (0, 8)$  jeśli  $a \in (0, 4)$ , to k jest rozłączna z okręgiem, jeśli  $a = 4$ , to prosta jest styczna do okręgu, jeśli  $a \in (4, 8)$ , to prosta jest sieczną okręgu c)  $a \in (-6, 0)$ , jeśli  $a \in (-6, -3)$ , to prosta jest sieczną okręgu, jeśli  $a = -3$ , to prosta jest styczna do okręgu, jeśli  $a \in (-3, 0)$ , to prosta jest rozłączna z okręgiemd)  $a \in (1, +\infty)$ ; prosta jest rozłączna z okręgiem**Wzajemne położenie dwóch okręgów**

4.62. a) okręgi styczne wewnętrznie b) okręgi styczne zewnętrznie c) okręgi się przecinają d) okręgi styczne wewnętrznie e) okręgi rozłączne wewnętrznie f) okręgi rozłączne zewnętrznie

4.63. a) 5 cm, 7 cm b) 3 cm, 9 cm

4.64. a) 3 cm, 6 cm b) 7 cm, 10 cm

4.65. 6 cm, 9 cm

4.66. trójkąt równoboczny o boku  $r$ 

4.67. 12,5 cm

4.68. **wskazówka**  $R - r = 9$  oraz  $15^2 = R^2 - r^2 = (R - r)(R + r) = 9 \cdot (R + r)$ , teraz wystarczy rozwiązać układ równań  $\begin{cases} R - r = 9 \\ R + r = 25 \end{cases}$ 4.69. a)  $k \in (0, +\infty)$ ; jeśli  $k \in (0, 1)$ , to okręgi rozłączne wewnętrznie; jeśli  $k = 1$  to okręgi styczne wewnętrznie; jeśli  $k \in (1, 5)$ , to okręgi się przecinają; jeśli  $k = 5$  to okręgi styczne zewnętrznie; jeśli  $k \in (5, +\infty)$ , to okręgi rozłączne zewnętrznieb)  $k \in (1, +\infty)$ ; jeśli  $k \in (1, 3)$ , to okręgi rozłączne zewnętrznie; jeśli  $k = 3$ , to okręgi styczne zewnętrznie; jeśli  $k \in (3, +\infty)$ , to okręgi się przecinają c)  $k \in (0, +\infty)$ ,jeśli  $k < 0$  to okręgi rozłączne zewnętrznie; jeśli  $k = 0$  to okręgi stycznezewnętrznie; jeśli  $k \in \left(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$  to okręgi się przecinają; jeśli  $k = 3\frac{1}{2}$  to okręgistyczne wewnętrznie; jeśli  $k \in \left(3\frac{1}{2}, 5\right)$  to okręgi rozłączne wewnętrznied)  $k \in (-1, 5)$ ; jeśli  $k \in [1, 3]$  to okręgi styczne wewnętrznie; jeśli  $k \in (-1, 1) \cup (3, 5)$ , to okręgi rozłączne wewnętrznie; jeśli  $k = (1, 3)$ , to okręgi się przecinają4.70. a)  $m \in [8, 14]$  b)  $m \in (8, 14)$ 4.71.  $a \in \left(4, 4\frac{2}{3}\right)$

4.72. 10 cm

4.73. 15

4.74.  $|O, O_2| = 3\sqrt{2}$

4.75. a)  $4\sqrt{10}$  b)  $2\sqrt{10}$

4.76.  $\frac{1}{2}r$  Kąt z wierzchołka środkowego okręgu wyznacza Wysokość Trójk. Oj kątą poprowadzoną na podstawę w zależności od  $r$

4.77.  $\frac{1}{2}r$  Poprowadź przez punkty  $O_1, O_2$  odcinki prostopadłe do odcinka  $AB$

## Koła i kąty

4.78. a)  $x = 10^\circ$  b)  $y = 60^\circ$  c)  $z = 160^\circ$  d)  $x = 76^\circ$  e)  $z = 67^\circ$  f)  $x = 34^\circ$

4.79. a)  $x = 65^\circ$  b)  $y = 105^\circ$  c)  $59^\circ$  d)  $77^\circ$

4.80. a)  $60^\circ, 65^\circ, 55^\circ$  b)  $35^\circ, 15^\circ, 130^\circ$  c)  $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$

4.81. a)  $40^\circ$  b)  $100^\circ$  c)  $55^\circ$

4.82. a)  $90^\circ$  b)  $120^\circ$  c)  $225^\circ$  d)  $108^\circ$  e) ok.  $57^\circ$  f) ok.  $286^\circ$

4.83. a)  $6\pi$  b)  $12\pi$  c)  $3\pi$  d)  $\frac{14\pi}{3}$  e)  $19,5\pi$

4.84. a)  $20^\circ$  b)  $80^\circ$  c)  $120^\circ$  d)  $140^\circ$

4.85.  $\frac{2}{3}$

4.86.  $\widehat{BC} = \widehat{AC} = AB = 2, 3, 7$

4.87.  $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$

4.91.  $\frac{1}{2}r$  Zauważ, że  $\angle A, \angle ABC, \angle AXC$  łącznie tworzą kąt  $\widehat{AEC}$  jako sumę kątów  $\widehat{ACB}, \widehat{BCD}$  i skorzystaj z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.

4.92.  $\frac{1}{2}r$  Oblicz  $|AB|$  skorzystaj z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą

4.93.  $\frac{1}{2}r$  Oblicz miary kątów środkowych  $\widehat{BOA}$  oraz  $\widehat{AOB}$  gdzie  $O = C$  są środkami danych okręgów i skorzystaj z twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych opartych na tym samym łuku.

4.94.  $\frac{1}{2}r$  Poprowadź dwusieczną jednego kąta  $\angle A$  i przecina ona okrąg w punkcie  $P$ . Wykaż, że punkt  $P$  należy do dwusiecznej drugiego kąta.

4.95.  $\frac{1}{2}r$  Rozważ odcinki  $AM$  i  $AN$  z punktami  $M, N$  na łukach dwóch okręgów. Wykaż, że  $AM = AN$  wyrażając powyższe  $AM, AN$  w funkcji  $r$  i kątów  $\alpha, \beta, \gamma$  odpowiednio w zależności od  $\alpha, \beta, \gamma$ .

4.96.  $\frac{1}{2}r$  Wyraź kąt  $\widehat{CBA}$  za pomocą kątów  $\widehat{COA}$  oraz kąt  $\widehat{BCD}$  za pomocą kąta  $\widehat{BOA}$

4.97.  $\frac{1}{2}r$  Wykaż, że  $\widehat{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BOD}$  oraz  $\widehat{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{DOC}$

## Twierdzenia o stycznej i siecznej

4.98. 3 cm

4.99. 12 cm

4.100. 7 cm

4.101.  $|CM| = 16$  cm

4.102.  $|CD| = 10$  cm

4.103. a)  $r = 7$  b)  $|PE| = 16\sqrt{3}$

4.105.  $\frac{1}{2}r$  Niech  $|PA| = 3x$  oraz  $|PB| = y$  wówczas  $|PC| = 5x$ . Wyraź  $y$  w zależności od  $x$ .

4.106.  $AB = 12$  cm,  $AC = 6\sqrt{5}$  cm,  $AB = 12$  cm,  $AC = 6\sqrt{5}$  cm. Niech  $|CE| = x$  wówczas  $|EB| = 12 - x$ .

4.107. a)  $r = 3$  b)  $|CE| = 4$  cm,  $|EB| = 8$  cm. Skorzystaj z twierdzenia o stycznej i siecznej. Poprowadź promień  $DE$  i oblicz  $|CE|$ . Następnie zauważ, że  $\triangle OBC \cong \triangle OEC$ .

4.108.  $|CD| = \frac{90}{\sqrt{3}}$ ,  $|DB| = \frac{40}{\sqrt{3}}$ . Oblicz wysokość  $CE$  trójkąta  $ADC$  oraz długość odcinka  $CB$ .

4.109. a)  $r = 5$  b)  $|AB| = 2\sqrt{5}$

4.110.  $\frac{1}{2}r$  Skorzystaj z twierdzenia o siecznej i stycznej do wyznaczenia długości odcinka  $AQ$ , a następnie z twierdzenia o siecznych do obliczenia promienia wewnętrznego okręgu.

4.111.  $\frac{1}{2}r$  Wykaż, że trójkąty  $\triangle ABD$  i  $\triangle DCA$  są równoramienne.

## Symetralna boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie

4.112. 3 i 5 cm

4.113. a) 9 cm b)  $(31 + \sqrt{97})$  cm c) 12 cm d)  $\frac{36\sqrt{97}}{97}$  cm

4.114. 24 cm

4.115. 5 i 4

4.116. 168 cm

4.117. 4 cm, 4 cm,  $4\sqrt{3}$  cm

4.118. a)  $\frac{1}{2}r$  Niech środek  $S$  okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  należy do wysokości  $CD$ . Ponieważ przez punkt  $S$  można poprowadzić tylko jedną prostą prostopadłą do boku  $AB$ , więc wysokość  $CD$  zawiera się w symetralnej boku  $AB$ . Zatem symetralna boku  $AB$  przechodzi przez punkt  $C$ . Następnie wykaż, że  $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ . b) Skorzystaj z twierdzenia o kątach wpisanych i środkowych. Niech  $|AB| = 2a$ ,  $|CD| = 3x$ . Wówczas  $|CS| = |SD| = 2x$ . Zastosuj twierdzenie Pitagorasa kolejno do trójkątów  $DBS$  i  $DBC$ .

4.119. a) Środek okręgu jest środkiem najdłuższego boku b) nie leży na tej samej prostej c) nie leży na tej samej prostej d) leży na tej samej prostej

4.120.  $2\sqrt{3}$  cm

4.121.  $6\sqrt{3}$  cm

4.122. a)  $\sqrt{2}$  cm b)  $12,5$  cm c)  $30,5$  cm

4.123.  $4$  cm

4.124.  $84,5$  cm

4.125. a)  $4\frac{1}{6}$  cm b)  $8\frac{1}{3}$  cm  $6\frac{2}{3}$  cm,  $5$  cm

4.126.  $8\sqrt{5}$ ,  $4\sqrt{5}$ ,  $20$

4.127.  $|AB| \cdot |BC| \cdot |AC| = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1$  b)  $|AB| \cdot |BC| \cdot |AC| = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1$

4.128. b)  $6$  cm

4.129.  $12$  cm,  $9\frac{3}{8}$  cm

4.130.  $8\frac{1}{3}$  cm

4.131. a)  $13\frac{1}{48}$  cm b)  $69\frac{3}{44}$  cm

4.132.  $AB = 8$

4.133.  $24$  cm,  $15$  cm,  $15$  cm, wysokość. Wskazujemy, że wystarczy z twierdzenia Pitagorasa dowodzić, że suma długości boków jest równa. Następnie korzystamy z podobieństwa odpowiednich trójkątów do obliczenia wysokości. Stosunek poprowadzonej na podstawę

4.135. Trójkąt  $ABC$  jest rozwartokątny, bo  $h < R$ .

4.136.  $h = 6$ ,  $d = 0$

4.137. a)  $30$  b)  $17$  a) kątowy. Poprowadź symetralną odcinka  $AB$  oznacz długość po wstawionych na boki równych odcinków przez  $x$ . Wówczas  $\frac{8}{14} = \frac{x}{2x}$  stąd  $x = \frac{14 \cdot 8}{2} = 56$

Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt

4.138.  $\{40^\circ, 40^\circ, 100^\circ\}$  lub  $\{80^\circ, 80^\circ, 20^\circ\}$

4.139.  $63^\circ, 9^\circ$

4.140. I.  $10^\circ, 40^\circ, 130^\circ$  II.  $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$  III.  $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$  IV.  $30^\circ, 40^\circ, 110^\circ$  V.  $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$  VI.  $10^\circ, 60^\circ, 110^\circ$

4.141.  $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$  lub  $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$

4.142.  $55^\circ, 65^\circ, 80^\circ$

4.143.  $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$

4.144.  $24$  cm

4.145.  $6$  cm,  $10$  cm

4.146. a)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$  b)  $2,5$  cm

4.147.  $24\sqrt{3}$  cm

4.148. b)  $r = 3\sqrt{2} - 3$  b)  $r = 1$

4.149.  $1$  cm,  $2$  cm,  $1$  cm,  $3$  cm,  $2$  cm,  $3$  cm

4.150. a)  $2$  cm b)  $3$  cm c)  $2$  cm d)  $\{\sqrt{5} - 1\}$  cm

4.151. a)  $2\sqrt{2} - 2$  b)  $\sqrt{2} - 2$

4.152.  $2$  cm; wskazówka. Skorzystaj z własności opisanej w poprzednim zadaniu

4.154.  $R = 12,5$  cm,  $r = 3$  cm

4.155. a)  $1,5$  cm b)  $2,4$  cm

4.156. a)  $1\frac{1}{3}$  cm b)  $5,25$  cm

4.157.  $|AB| = 48$  cm,  $|AC| = |BC| = 30$  cm.

4.158.  $10$  cm; wskazówka. Niech  $O$  oznacza środek okręgu,  $D$  - punkt styczności okręgu z podstawą  $AB$ ,  $E$  - punkt styczności z ramieniem  $BC$ . Zauważ, że trójkąt  $ODC$  jest podobny do trójkąta  $OEC$  w skali  $2$ : jeśli  $|OC| = x$ , to  $|BC| = 2x$ .

4.159.  $2\frac{2}{3}$  cm,  $3\frac{1}{3}$  cm

4.160.  $9$  cm,  $3$  cm

4.161.  $6\frac{2}{3}$  cm lub  $15$  cm

4.162. a)  $|AB| = 6$  b)  $|AE| = 4\frac{5}{7}$ ,  $|BE| = \frac{3}{7}$

4.163. a)  $6$  cm,  $4$  cm b)  $5\frac{5}{11}$  cm,  $4\frac{6}{11}$  cm

4.164. a)  $8\frac{4}{7}$  cm,  $6\frac{3}{7}$  cm b)  $9$  cm,  $8$  cm

4.165. a)  $|CD| = 2\sqrt{3}$  b)  $R = 3\sqrt{3}$  c)  $3\sqrt{3} - 3$

4.166. a)  $\frac{60\sqrt{2}}{7}$  b)  $\frac{20\sqrt{10}}{3}$  wskazówka. Zauważ, że trójkąt jest prostokątny

4.167. a)  $4,2$  cm,  $5,6$  cm b)  $2,4\sqrt{2}$  cm

4.168. a)  $|AO| = \frac{48\sqrt{5}}{11}$  b)  $|CE| = 8$



$$4.169 \text{ a) } \angle E = \angle C = 15^\circ \text{ cm} \quad \text{b) } BP = 8\frac{2}{3} \text{ cm}, PC = 6\frac{2}{3} \text{ cm} \quad \text{c) } |AP| = 7\frac{2}{3} \text{ cm}$$

$$4.171 \text{ a) } |AB| = 20 \text{ cm} \quad \text{Niech } E \in AB \text{ oraz } PE \perp AB \text{ wówczas } |PB| = |PE| = 4 \text{ cm}, |CE| = 12 \text{ cm}$$

stąd  $|PB| = |CE| = 4$  cm. Następnie skorzystaj z twierdzenia o dwusiecznej w trójkącie. b)  $|AC| = \sqrt{745}$  cm

$$4.172 \text{ b) } r = 3, R = 6\frac{1}{2}, |OS| = 1\frac{1}{4}$$

$$4.173 \text{ a) } R = 12,5 \text{ cm} \quad \text{b) } 24 \text{ cm} \quad \text{Niech } D \text{ oznacza spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka } C \text{ wówczas } \triangle DBC \sim \triangle MSC$$

$$4.174 \text{ a) } r = 5 \quad \text{b) } |BP| = 7,5, |PC| = 12 \quad \text{c) } \frac{27+10}{20}$$

Test sprawdzający do rozdziału 4.

Nie odwróć	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
odwróć	B	D	C	B	A	D	D	B	D	C	A	B	D	C	C

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

$$16. 6 \text{ cm}$$

$$17. \text{ a) } \alpha = 35^\circ \quad \text{b) } \alpha = 50^\circ$$

$$18. \left(\frac{540}{7}\right)^\circ = 77^\circ$$

$$19. \text{ b) } |\angle A| = 30^\circ, |\angle B| = 25^\circ, |\angle C| = 115^\circ$$

$$21. \text{ a) } r = 3 \text{ cm}, R = 7 \text{ cm} \quad \text{b) } |AB| = 4,5 \text{ cm}$$

$$22. \text{ Okręgi styczne, jeśli } m = 2 \quad \text{a) } \text{okręgi są styczne zewnętrznie, jeśli } m = 5$$

promienie okręgów 5 i 9, okręgi są styczne wewnętrznie, jeśli  $m = 13$ ; promienie okręgów: 25 i 39 b)  $m \in (3, 13)$

$$23. 18 \text{ cm}$$

$$25. 1/3$$

$$26. \text{ a) } |PF| = 3,75 \text{ cm} \quad \text{b) } |CF| = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$27. \text{ a) } 32 \text{ cm}, 8 \text{ cm; odpowiedź: Wykaż, że trójkąt } ABC \text{ jest prostokątny.}$$

$$\text{b) } 11\frac{3}{7} \text{ cm}, 6\frac{1}{7} \text{ cm}$$

$$28. \text{ a) } 10 \quad \text{b) } R = 7\frac{1}{24} \quad \text{c) } r = 3\frac{1}{3}$$

$$29. \text{ a) } 30 \text{ cm}, 40 \text{ cm}, 50 \text{ cm} \quad \text{b) } 10 \text{ cm}$$

$$30. \text{ a) } 3\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3} \quad \text{b) } R = 18\frac{1}{6}, r = 6\frac{3}{8}$$

$$31. |OP| = 3 \text{ cm}, |PI| = 5 \text{ cm}$$

$$32. \text{ a) } r = 6, r = 2 \quad \text{b) } |OA| = 12$$

$$33. \text{ Warunki zadania są spełnione, gdy } m \in (0, 5). \text{ Jeśli } m \in \left(\frac{2}{3}, 5\right) \text{ to okręgi są styczne}$$

$$\text{we wnętrzu, jeśli } m = \frac{2}{3} \text{ to okręgi się przecinają, jeśli } m \in (0, \frac{2}{3}) \text{ i } (2, 5)$$

to okręgi są rozłączne wewnętrznie

$$34. \text{ Odcinek } |AC| \text{ wysokość } CD \text{ trójkąta } ADC \text{ o } \angle C = 90^\circ. \text{ Następnie skorzystaj z twierdzenia o ścieżkach}$$

$$35. \text{ odpowiedź: Wykaż, że cięciwy } CA \text{ i } DA \text{ są średnicami tych okręgów}$$

$$36. |AB| = 28\frac{2}{3} \text{ cm}, |AC| = |BC| = 28\frac{1}{3} \text{ cm}$$

$$37. \text{ a) } R = 4,5 \quad \text{b) } r = 5 \quad \text{c) } 1,8\sqrt{3}$$

$$38. 4 \text{ cm}$$

$$39. 4,8 \text{ cm}$$

$$40. \text{ odpowiedź: Niech } a, b, c \text{ będą długościami boków trójkąta oraz } a = 5x. \text{ Mamy } b = c = 2 \cdot 3 \text{ oraz } c^2 = b^2 + (5x)^2, \text{ stąd } b = 2\sqrt{5}x, c = 3\sqrt{5}x.$$

## 5. Trygonometria

Trygonometria kątów ostrego – powtórzenie wiadomości z klasy 1.

$$5.1. \text{ a) } 33,5 \text{ cm} \quad \text{b) } 38,5 \text{ cm} \quad \text{c) } 2^\circ \text{ cm} \quad \text{d) } 45,5 \text{ m} \quad \text{e) } 23,5 \text{ cm} \quad \text{f) } 77,5 \text{ cm}$$

$$5.2. \text{ a) } 3 \quad \text{b) } \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$5.3. \text{ a) } \frac{1}{4} \quad \text{b) } -2\sqrt{3} \quad \text{c) } -30 + 5\sqrt{5}$$

$$5.4. \text{ a) } \sqrt{3} \text{ cm} \quad \text{b) } \sqrt{2} \text{ cm} \quad \text{c) } 1 \text{ cm}$$

$$5.5. \text{ a) } 60^\circ, 144^\circ, 96^\circ \quad \text{b) } 45^\circ, 144^\circ, 15^\circ$$

$$5.6. \text{ a) } A = 45^\circ, B = 30^\circ, C = 105^\circ \quad \text{b) } A = 60^\circ, B = 30^\circ, C = 90^\circ$$

$$5.7. \text{ a) } \cos \alpha = \frac{24}{25}, \tan \alpha = \frac{7}{24}, \cot \alpha = 3\frac{3}{7} \quad \text{b) } \sin \alpha = \frac{11}{61}, \tan \alpha = \frac{11}{60}, \cot \alpha = 5\frac{5}{11}$$

$$\text{c) } \sin \alpha = \frac{2}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13}, \cot \alpha = \frac{5}{12} \quad \text{d) } \sin \alpha = \frac{3+10}{10}, \cos \alpha = \frac{0}{10}, \cot \alpha = 3$$

$$5.8. \text{ odpowiedź: Wykaż, że } \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ.$$

## Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta płaskiego

$$5.13 \quad a) \sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}$$

$$b) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c) \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d) \sin \alpha = \frac{8}{17}, \cos \alpha = \frac{15}{17}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8}$$

$$e) \sin \alpha = -1, \cos \alpha = 0, \operatorname{tg} \alpha = \text{nie istnieje}, \operatorname{ctg} \alpha = 0$$

$$f) \sin \alpha = 0, \cos \alpha = -1, \operatorname{tg} \alpha = 0, \operatorname{ctg} \alpha = \text{nie istnieje}$$

$$5.14. \quad a) y = -4 \quad b) x = -3 \quad c) x = 7,5 \quad d) y = -1$$

$$5.15. \quad a) P(3\sqrt{2}, 2) \quad b) P(-3, 5) \quad c) P(-6, 1) \quad d) P(1, \sqrt{3})$$

$$5.16. \quad a) P(2, 4) \quad b) P(-3, 1) \quad c) P(12, 9) \quad d) P(\sqrt{5}, 2, 5)$$

$$5.17. \quad a) \alpha = 90^\circ \quad b) \alpha = 0 \text{ lub } \alpha = 180^\circ \quad c) \alpha = 90^\circ \text{ lub } \alpha = 270^\circ$$

$$5.18. \quad a) \sin 210^\circ = -\frac{1}{2}, \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} 210^\circ = \sqrt{3}$$

$$b) \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}, \operatorname{tg} 240^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} 240^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c) \sin 335^\circ = \frac{4}{5}, \cos 335^\circ = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} 335^\circ = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg} 335^\circ = \frac{3}{4}$$

$$d) \sin 330^\circ = -\frac{1}{2}, \cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 330^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} 330^\circ = -\sqrt{3}$$

$$5.19. \quad a) \text{III ćw.} \quad b) \text{IV ćw.} \quad c) \text{I ćw. lub II ćw.} \quad d) \text{II ćw.} \quad e) \text{IV ćw.} \quad f) \text{IV ćw.}$$

$$5.20. \quad a) \text{wartość ujemną} \quad b) \text{wartość dodatnią} \quad c) \text{wartość ujemną} \quad d) \text{wartość dodatnią}$$

$$5.21. \quad a) P(-3, 7) \quad b) P(-3\sqrt{10}, \sqrt{10}) \quad c) P(-1, 2) \quad d) P(-2, 1)$$

$$5.22. \quad a) \text{wskazówka skrótyła definicję funkcji trygonometrycznych i stał zę koncówce ramię kąta i zawiera się wprost w } y = x$$

## Podstawowe tożsamości trygonometryczne

$$5.25. \quad a) \cos \alpha = 0,6, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4} \quad b) \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{\sqrt{15}}$$

$$c) \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

$$d) \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, \cos \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$$

$$5.26. \quad a) \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \quad b) \sin \alpha = \frac{7}{25}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{24}{7}$$

$$c) \cos \alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$d) \sin \alpha = \frac{60}{61}, \cos \alpha = \frac{11}{61}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{11}$$

$$5.27. \quad a) \cos \alpha = \frac{12}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5} \quad b) \cos \alpha = \frac{8}{17}, \sin \alpha = \frac{15}{17}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$$

$$c) \sin \alpha = \frac{12}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5} \quad d) \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$5.28. \quad a) \sin \alpha = \frac{12}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \frac{12}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$$

$$b) \cos \alpha = \frac{11}{61}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{11}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{11}{60} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \frac{11}{61}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{11}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{11}{60}$$

$$c) \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{1}{10}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{1} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

$$d) \left( \cos \alpha = \frac{45}{53}, \sin \alpha = \frac{28}{53}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{28}{45} \right) \quad \text{lub} \quad \left( \cos \alpha = \frac{45}{53}, \sin \alpha = \frac{28}{53}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{28}{45} \right)$$

$$5.29. \quad a) \frac{15}{16} \quad b) 6$$

$$5.30. \quad a) 1,09 \quad b) 0,5 \cdot \sqrt{3} \quad c) -11\frac{1}{2} \quad d) -1\frac{16}{21}$$

$$5.31. \quad a) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad b) \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{5} \quad c) \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad d) \operatorname{ctg} \alpha = -2$$

$$5.32. \quad a) \frac{60}{169} \quad b) \frac{17}{13} \quad c) \sin \alpha = \frac{12}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$5.33. \quad a) \frac{1}{4} \quad b) \frac{3}{2} \quad c) \frac{7}{8}$$

$$5.34. \quad a) 14 \quad b) 194 \quad c) 12$$

$$5.35. \quad a) \text{nie} \quad b) \text{tak, do IV ćw.} \quad c) \text{tak, do II ćw.} \quad d) \text{nie}$$

$$5.36. \quad a) \text{nie} \quad b) \text{tak} \quad c) \text{tak} \quad d) \text{nie}$$

$$5.37. \quad a) \text{nie} \quad b) \text{tak} \quad c) \text{tak} \quad d) \text{tak}$$

$$5.38. \quad a) \cos \alpha = -\sqrt{1-b^2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{-b}{\sqrt{1-b^2}}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1-b^2}}{-b}$$

$$b) \sin \alpha = \sqrt{1-a^2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

5.43. **wskazówka** Podaj przykład kąta  $\alpha$ , dla którego  $L \neq P$ .

5.44. **wskazówka** Podaj przykład kąta  $\alpha$ , dla którego  $L \neq P$ .

5.45. **b) wskazówka** Rozpatrz dwa przypadki  $\sin \alpha > \cos \alpha$  oraz  $\sin \alpha < \cos \alpha$ .

5.47. a) Skorzystaj z zależności  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  oraz  $\sin \alpha \geq 0$  oraz  $\cos \alpha \geq 0$ .

b) **wskazówka** 1 sposób z punktu a) wynika, że  $0 \leq \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{4}$ , zatem

$0 \leq \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{4}$ . Teraz wyrażenie  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$  doprowadź do postaci

$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$ . 2 sposób zastąp  $\cos^2 \alpha$  wyrażeniem  $1 - \sin^2 \alpha$ ; następnie podstaw  $t = \sin \alpha$  gdzie  $t \in [0, 1]$  oblicz wartość największą i wartość najmniejszą

funkcji  $f(t) = t^2 - t + \frac{1}{4}$  w przedziale  $[0, 1]$ .

5.48. **wskazówka** Oblicz miejsca zerowe  $x_1, x_2$  następnie wykaż, że  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

5.49. **wskazówka** Oblicz miejsca zerowe  $x_1, x_2$  następnie wykaż, że  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

5.50.  $\alpha = \sqrt{2}$  lub  $\alpha = -\sqrt{2}$  jeśli  $\alpha = \sqrt{2}$  to  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  oraz  $45^\circ$  jeśli  $\alpha = -\sqrt{2}$  to  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.51. a) 225

5.51. b) 6. wówczas  $x = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$  lub  $x = \frac{4 + \sqrt{2}}{6}$  końcowe rozwiązanie znajduje się w I ćwiartce

**Wybrane wzory redukcyjne**

5.52. a)  $1\frac{3}{4}$  b)  $2\frac{1}{2}$  c)  $7\frac{4\sqrt{3}}{12}$  d)  $2\frac{1}{2}$

5.53. a)  $2\frac{1}{2}$  b)  $1\frac{4\sqrt{6}}{12}$  c)  $1\frac{4\sqrt{6}}{12}$  d)  $1\frac{4\sqrt{6}}{12}$  liczby wyliczone to  $a < b$

5.54. a)  $x = y$  b)  $x = y$  c)  $x = y$  d)  $x = y$

5.55. a) 1 b) 1 c) 0 d) 2 e) 3

5.56. a) 1 b) 2 c) -3 d)  $1\frac{1}{4}$  e) -2

5.57. a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

5.58. a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.59. a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  c)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  d)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  e)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  f)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.59. a) 210 b) 180 c) 135 d) 130 e) 315 f) 120

**Kąt skierowany. Miara łukowa kąta**

5.65. a)  $97^\circ$  b)  $230^\circ$  c)  $130^\circ$  d)  $200^\circ$  e)  $270^\circ$  f)  $150^\circ$

5.66. a) 6 b) 2 c)  $\frac{4\pi}{15}$  d)  $\frac{4\pi}{9}$  e) 2 f)  $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

5.67. a)  $\frac{\pi}{10}$  b)  $\frac{\pi}{9}$  c)  $-\frac{\pi}{90}$  d)  $-\frac{3\pi}{5}$  e)  $\frac{7\pi}{5}$  f)  $-\frac{5\pi}{3}$  g)  $\frac{3\pi}{4}$  h)  $-\frac{7\pi}{6}$

5.68. a) 126 b) 450 c)  $40^\circ$  d) 30 e)  $120^\circ$  f) 1230 g) 495 h) 780

5.69. a)  $\frac{5}{12}\pi$  b)  $\frac{7}{18}\pi$  c)  $\frac{17}{18}\pi$  d)  $\frac{11}{24}\pi$  e)  $\frac{\pi}{36}$  f)  $\frac{\pi}{6}$

5.70. a)  $2^{10}$  b)  $4^{10}$  c)  $5^{10}$  d)  $3^{10}$  e)  $10^{10}$  f)  $1^{10}$

5.71. a)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  c)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  d)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5.72. a)  $1\frac{1}{2}$  b)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$  c)  $\frac{3}{4}$  d) 1

5.73. a)  $1\frac{\sqrt{3}}{2}$  b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\sqrt{3}$  d)  $\frac{3}{4}$

5.74. a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{\sqrt{6}}{4}$  c) 0 d) 2

5.75. a) 1.  $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

II.  $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b)  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = 1$

c)  $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = -1$

d)  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$

e)  $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$

f)  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = -1$

g)  $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = -1$

h)  $\alpha = 0$  lub  $\alpha = \pi$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  nie istnieje lub  $\alpha = \pi$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = -1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  nie istnieje

$$1) \alpha = \frac{5\pi}{6} \quad \sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$$

$$2) \alpha = \frac{7\pi}{6} \quad \sin \alpha = -\frac{1}{2} \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$$

$$5.76. \quad a) \alpha = \frac{5\pi}{4} \quad b) \alpha = \frac{2\pi}{3} \quad c) \alpha = \frac{11\pi}{6} \quad d) \alpha = \frac{5\pi}{3}$$

$$5.77. \quad a) \alpha = \frac{7\pi}{6} \quad b) \alpha = \frac{3\pi}{2} \quad c) \alpha = \frac{3\pi}{4} \quad d) \alpha = \frac{11\pi}{6}$$

$$5.78. \quad -\frac{\sqrt{2}}{15}$$

$$5.79. \quad \frac{56}{65}$$

$$5.80. \quad 3 \frac{1613}{6710}$$

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

$$5.81. \quad a) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad b) \frac{\sqrt{3}}{3} \quad c) -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad d) -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad e) \frac{1}{2} \quad f) -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad g) \sqrt{3} \quad h) 1$$

$$5.82. \quad a) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad b) \frac{\sqrt{3}}{4} \quad c) \sqrt{3} \quad d) \frac{-1}{4} \quad e) 1 \frac{1}{2} \quad f) \frac{-1}{2}$$

$$5.83. \quad a) 0 \quad b) 0 \quad c) 2 \quad d) 1$$

$$5.84. \quad a) T = 4 \quad b) f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 2 + 4k \vee x = -2 + 4k, k \in \mathbb{Z}) \quad c) x = 4k, k \in \mathbb{Z} \\ e) f(x) = 2 \quad (x = 1 + 2k \vee x = -1 + 2k, k \in \mathbb{Z})$$

$$5.85. \quad a) T = 8\pi \quad b) x = 3 + 8k, k \in \mathbb{Z} \quad c) (x = -2 + 8k \vee x = 8k, k \in \mathbb{Z})$$

$$d) (x = 0 \Leftrightarrow (x = 1 + 4k \vee x = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z}))$$

$$e) f(x) = 2 \quad (x = 2 - 8k \vee x = 4 - 8k, k \in \mathbb{Z})$$

$$5.86. \quad b) T = 5 \quad c) f(x) = 2 < x < 2 + 5k, k \in \mathbb{Z} \quad d) x = 5k + 1, k \in \mathbb{Z}$$



$$b) T = 6 \quad c) x = 3k + 1, x = 3k + 2 \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$5.88. \quad a) T = \pi \quad b) T = \frac{\pi}{2} \quad c) T = \frac{\pi}{3} \quad d) T = \frac{\pi}{4} \quad e) T = \frac{\pi}{5} \quad f) T = \frac{\pi}{6}$$

$$5.89. \quad a) T = 2 \quad b) T = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \quad c) T = \pi \quad d) T = \pi \quad e) T = \frac{1}{4} \quad f) T = 4$$

$$5.90. \quad a) \text{funkcja parzysta} \quad b) \text{funkcja nieparzysta} \quad c) \text{funkcja parzysta} \quad d) \text{funkcja parzysta} \quad e) \text{funkcja nieparzysta} \quad f) \text{funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta}$$

$$5.92. \quad a) (-1, 3) \quad b) (-2, 0) \quad c) (-3, +\infty) \quad d) (-\infty, 2) \quad e) (-1, 2) \quad f) (0, 1)$$

$$5.93. \quad a) \frac{\pi}{2} \quad b) \frac{\pi}{4} \quad c) \frac{\pi}{3} \quad d) \frac{\pi}{6} \quad e) \frac{\pi}{5} \quad f) \frac{\pi}{6}$$

$$5.94. \quad a) (-1, 2) \quad b) (0, \frac{3}{2}) \quad c) (0, +\infty) \quad d) (-2, -1)$$

$$5.95. \quad a) \frac{\pi}{2} \quad b) \frac{\pi}{4} \quad c) \frac{\pi}{3} \quad d) \frac{\pi}{6} \quad e) \frac{\pi}{5} \quad f) \frac{\pi}{6}$$

Wykresy funkcji trygonometrycznych

$$5.96. \quad a) \sin x \quad b) \cos x \quad c) \tan x \quad d) \cot x \quad e) \sec x \quad f) \csc x$$

$$5.97. \quad a) \sin x \quad b) \cos x \quad c) \tan x \quad d) \cot x \quad e) \sec x \quad f) \csc x$$

$$5.98. \quad a) \sin x \quad b) \cos x \quad c) \tan x \quad d) \cot x \quad e) \sec x \quad f) \csc x$$

$$5.99. \quad a) \sin x \quad b) \cos x \quad c) \tan x \quad d) \cot x \quad e) \sec x \quad f) \csc x$$

$$5.100. \quad a) \text{wyrażenie ujemne} \quad b) \text{wyrażenie dodatnie} \quad c) \text{wyrażenie ujemne}$$

$$d) \text{wyrażenie dodatnie} \quad e) \text{wyrażenie dodatnie} \quad f) \text{wyrażenie dodatnie}$$

$$5.101. \quad a) \text{wyrażenie ujemne} \quad b) \text{wyrażenie dodatnie} \quad c) \text{wyrażenie dodatnie} \quad d) \text{wyrażenie dodatnie}$$

$$5.102. \quad a) \text{wyrażenie dodatnie} \quad b) \text{wyrażenie dodatnie} \quad c) \text{wyrażenie dodatnie} \quad d) \text{wyrażenie dodatnie}$$

$$5.103. \quad a) \text{iloczyn jest ujemny} \quad b) \frac{2\pi}{3} \quad c) k \in \mathbb{Z} \quad d) \frac{\pi}{4}$$

$$5.104 \text{ a) } \operatorname{ctg} 3^\circ > \operatorname{ctg} 205^\circ > \operatorname{ctg} 61^\circ > \operatorname{ctg} 178^\circ \quad \text{b) } \frac{\pi}{6} > \frac{5\pi}{6} \quad \text{c) } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$5.105 \text{ a) } -\frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \quad \text{b) } x \in \left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$5.106 \text{ a) } x = \frac{\pi}{3} \quad k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{b) } x = \frac{\pi}{6} \quad k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{c) } x = \frac{\pi}{2} \quad k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$5.107 \text{ a) } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{b) } x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z} \quad \text{c) } x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$5.108 \text{ a) } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{b) } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z} \quad \text{c) } x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{d) } x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$5.109 \text{ a) } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{b) } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{d) } x \in \left(\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$5.111 \text{ a) } \sin x = \frac{\pi}{3} \quad \text{b) } \sin x = \cos 3x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{c) } \sin x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$5.114 \text{ a) } u = \frac{\pi}{4} \quad \text{b) } u = \frac{\pi}{2} \quad \text{c) } u = \frac{4\pi}{9} \quad \text{d) } u = 0$$

Test sprawdzający do rozdziału 5.

$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\sin 2x$	$\cos 2x$	$\operatorname{tg} 2x$	$\operatorname{ctg} 2x$
0	1	0	∞	0	1	0	∞
1	0	∞	0	0	0	∞	0
∞	0	0	∞	0	0	∞	0

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

$$11 \quad \sin \alpha = \frac{8}{17} \quad \cos \alpha = \frac{15}{17} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8}$$

$$15 \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad b = \frac{1}{2} \quad \text{atomiast } a > b$$

$$16 \quad a = 300 \quad b = 150$$

$$17 \quad a) 4 \frac{1}{4} \quad b) 16 \frac{1}{16}$$

$$18 \quad a) \frac{\sqrt{10}}{3} \quad \text{Oblicz } \sin \alpha, \cos \alpha \text{ i } \operatorname{tg} \alpha \text{ z } \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{3} \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$19 \quad a) 1 \quad b) \sqrt{3}$$

$$21 \quad \text{wykazówka: Wykaż, że } \operatorname{tg} x = 1.$$

$$27 \quad a) \sin x = \frac{1}{2} \quad b) \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$29 \quad a) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{3}{1}$$

$$b) \sin x = \frac{1}{2} \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$30 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$31 \quad \text{Z wykaźówki. Zastosuj wzory redukcyjne. Następnie pomnóż licznik i mianownik ułamka przez wyrażenie } 1 + \sin x$$

$$32 \quad a) T = 4 \quad b) T = \frac{\pi}{3}$$

$$33 \quad a) \text{funkcja } f \text{ jest parzysta} \quad b) \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \quad c) D_f = (-\pi, \pi)$$

$$d) x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$34 \quad a) x = \frac{\pi}{6} \quad b) x = \frac{5\pi}{6} \quad c) x = \frac{11\pi}{6} \quad d) x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ lub } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$e) x = \frac{\pi}{3}$$

$$35 \quad a) x = \frac{\pi}{2} \quad b) y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$$

## 6. Geometria analityczna

Odcinek w układzie współrzędnych

$$6.1 \quad a) 11 \quad b) 9 \quad c) 17 \quad d) 6\sqrt{2} \quad e) \sqrt{10} + \sqrt{2} \quad f) \frac{1}{3}$$

$$6.2 \quad a) (1, 2) \quad b) (0, 3) \quad c) (3, 4) \quad d) \sqrt{2}, 2$$

$$6.3 \quad a) C(9, 3), D(8, 3) \quad b) A(4, 3), D(5, 6)$$

$$6.4 \quad a) D(-6, -2), F(-2, 2) \quad b) C(6, 6), F\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$6.5 \quad a) |AC| = 2\sqrt{17} \quad |DB| = 8\sqrt{5} \quad b) |DB| = 10, |AC| = 10\sqrt{2}$$



6.6. a)  $|AB| = |DC| = 5$ ,  $|AD| = |BC| = \sqrt{65}$  b)  $|AB| = |DC| = 8$ ,  $|AD| = |BC| = 2\sqrt{17}$

6.7. a)  $\sqrt{113}$  b)  $\sqrt{26}$  c)  $\sqrt{53}$

6.8. a)  $S_1(3, -4)$ ,  $S_2(2, 1)$ ,  $S_3(1, 2)$

6.9

6.10

6.13. **wskazówka** Wykaż, że wszystkie boki czworokąta mają jednakową długość

6.14. **wskazówka** Wykaż, że odpowiednie wektory są równe

6.15. **wskazówka** Wykaż, że odpowiednie wektory są równoległe

Równanie kierunkowe prostej

6.16

6.17

6.18 a)  $y = 2x - 28$  b)  $y = 10x + 15$  c)  $y = -\frac{2}{3}x$  d)  $y = \frac{1}{2}x$

6.19 a)  $45^\circ$  b)  $60^\circ$  c)  $120^\circ$  d)  $135^\circ$  e)  $150^\circ$  f)  $30^\circ$

6.20 a)  $5^\circ$  b)  $10^\circ$  c)  $15^\circ$  d)  $20^\circ$  e)  $25^\circ$  f)  $30^\circ$

6.21 a)  $10^\circ$  b)  $20^\circ$  c)  $30^\circ$  d)  $40^\circ$  e)  $50^\circ$  f)  $60^\circ$

6.22 a)  $10^\circ$  b)  $20^\circ$  c)  $30^\circ$  d)  $40^\circ$  e)  $50^\circ$  f)  $60^\circ$

6.23 a)  $10^\circ$  b)  $20^\circ$  c)  $30^\circ$  d)  $40^\circ$  e)  $50^\circ$  f)  $60^\circ$

6.24 a)  $10^\circ$  b)  $20^\circ$  c)  $30^\circ$  d)  $40^\circ$  e)  $50^\circ$  f)  $60^\circ$

6.25 a)  $y = 5$  b)  $y = \frac{3}{4}x + 9$  c)  $y = 2x + 3$  d)  $y = 0,125x + 18$

6.26 a)  $m = \frac{1}{2}$  b)  $m = 13$  c)  $m = 1\frac{1}{2}$  d)  $m = 1$

6.27 a)  $m = 1$  b)  $m = 2$

6.28 a)  $m = 1$  b)  $m = 2$  c)  $m = 3$  d)  $m = 4$  e)  $m = 5$  f)  $m = 6$

6.29 a) dla  $AB$ :  $y = \frac{1}{2}x + 2$ , dla  $BC$ :  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ , dla  $AC$ :  $y = -x + 5$

6.30 a)  $y = 4x - 2$  b)  $y = -x + 1$  c)  $y = \frac{1}{2}x + 2$  d)  $y = \frac{3}{2}x + 5$

6.31. **wskazówka** Wykaż, że środek odcinka  $AD$  należy do prostej  $k$  oraz  $k \perp AB$

6.32. **wskazówka** Wykaż, że punkt  $C$  należy do prostej  $k$  oraz  $k \perp AB$

6.33. **wskazówka** Wyznacz współczynniki kierunkowe prostych  $AB$ ,  $BC$ ,  $DC$ ,  $AC$

6.34. **wskazówka** Wyznacz współczynniki kierunkowe prostych  $AB$ ,  $BC$ ,  $DC$ ,  $AC$

6.35. **wskazówka** Wystarczy pokazać, że odpowiednie boki są do siebie prostopadłe i mają taką samą długość; albo R. przekątne czworokąta są do siebie prostopadłe, a punkt przecięcia się przekątnych leży w jednakowej odległości od wszystkich wierzchołków czworokąta

6.36.  $AB$ :  $y = \frac{1}{6}x + 1$ ,  $BC$ :  $y = \frac{1}{2}x + 3$ ,  $AC$ :  $y = \frac{1}{2}x + 7$

6.37.  $AB$ :  $y = \frac{1}{7}x + 2$ ,  $BC$ :  $y = \frac{2}{7}x + 5\frac{6}{7}$ ,  $AC$ :  $y = 6x + 31$

6.38. a)  $p = 7$  lub  $p = 1$  b)  $p = 4$  lub  $p = 6$  c)  $p = 2$

6.39. a)  $p = 7$  lub  $p = 8$  b)  $p = 3$  lub  $p = 5$  c)  $p = 10$  lub  $p = 6$

Równanie ogólne prostej

6.40. a) np.  $x + y = 0$  b) np.  $x + 4y - 5 = 0$  c) np.  $x - 6y - 7 = 0$

6.41. a)  $2x + y - 8 = 0$  b)  $y + 4 = 0$  c)  $x - y + 5 = 0$  d)  $3x + y = 0$

6.42. a)  $5x - 3y - 12 = 0$  b)  $x - \sqrt{5} = 0$  c)  $2x - 3y - 2 = 0$  d)  $2x - y - 5 = 0$

6.43. a)  $135^\circ$  b)  $60^\circ$  c)  $120^\circ$  d)  $30^\circ$  e)  $90^\circ$  f)  $0^\circ$

6.44. a) tak b) nie c) nie d) tak

6.45. a)  $m = 3x - 2y + 5 = 0$  b)  $m = 4x - 9y - 45 = 0$  c)  $m = x + 4 = 0$  d)  $m = y - \sqrt{2} = 0$

6.46. a) tak b) tak c) nie d) tak

6.47. a)  $m = x - 3y - 9 = 0$  b)  $m = x - \sqrt{2} = 0$  c)  $m = y - 8 = 0$  d)  $m = 2x + 3y - 6 = 0$

6.48. a)  $A = \frac{-5}{7}$ ,  $C = 5$  b)  $A = -1\frac{1}{3}$ ,  $C = -5$  c)  $A = 4$ ,  $C = 0$  d)  $A = -2$ ,  $C = -6$

6.49. a)  $5x - 2y - 1 = 0$  b)  $y - 2 = 0$  c)  $x + y - 1 = 0$  d)  $x - 3 = 0$

6.50.  $a = 6$

6.51.  $a = 1$  lub  $a = 3$

6.52. a)  $A = 2$ ,  $B = 5$  b)  $A = 12$ ,  $B = -2$

Równanie okręgu

6.53. a)  $x^2 + y^2 = 9$  b)  $x^2 + (y - 2)^2 = 5$  c)  $(x - 4)^2 + y^2 = 6,25$

d)  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$  e)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{1}{9}$  f)  $(x + \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 6$

6.54. a)  $S(0, 0)$ ,  $r = 1$  b)  $S(1, 0)$ ,  $r = 1,5$  c)  $S(-1, 2)$ ,  $r = 5$  d)  $S(-3, -1)$ ,  $r = 9$

- 6.55. a)  $S(1, 2), r = 3$  b)  $S(1, 3), r = 1$  c)  $S(4, 0), r = 3$   
 d)  $S(0, \sqrt{3}), r = 3$  e)  $S(1, 3), r = 1$  f)  $S(0, 2), r = 3$

- 6.56. a)  $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), r = 2$  b)  $S(0, \sqrt{2}), r = 2\sqrt{2}$

- c)  $S\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right), r = 1$  d)  $S(1, 5, 0.5), r = 2$

- 6.57. Nie: tylko punkt  $(3, -1)$  spełnia to równanie.

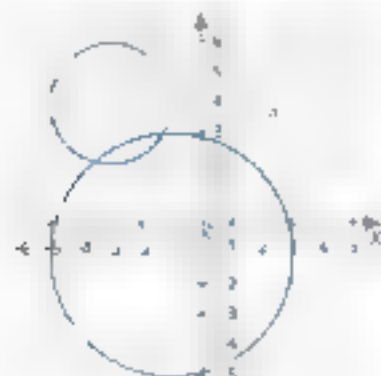
- 6.58. a) tylko punkty A, B b) tylko punkty A, C

- 6.59. a)  $x^2 + y^2 = 25$  b)  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

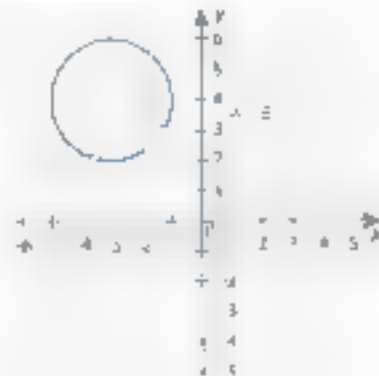
- c)  $x = 3, y = 2, x \cdot y = 6$  d)  $x = 2, y = 1, x \cdot y = 2$

6.60.

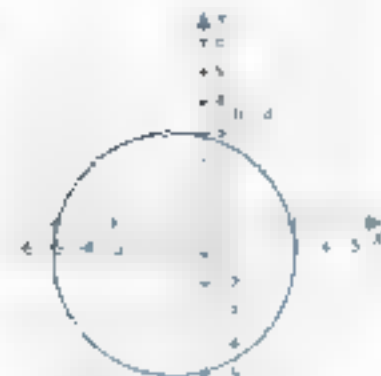
a)



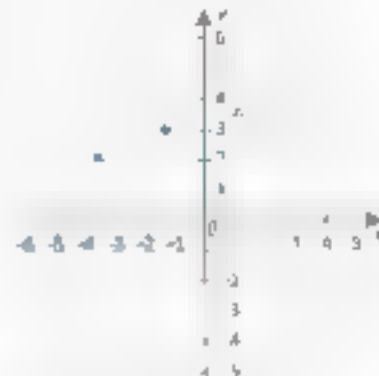
b)



c)



d)



- 6.61. a)  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 100$  b)  $(x-3)^2 + y^2 = 25$

- c)  $x^2 + (y-4)^2 = 25$  d)  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 100$

- 6.62. a)  $(x-3)^2 + y^2 = 25$  b)  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$

- c)  $(x-4)^2 + y^2 = 100$  d)  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 169$

- 6.63.  $\frac{a}{7} \leq b \leq a \cdot b$

Wyznaczanie w układzie współrzędnych punktów wspólnych prostych, okręgów i paraboli

- 6.64. a)  $(1, 4)$  b)  $(2, 4)$  c)  $(1, 4, 3)$  d)  $(2, 3), (4, 3)$

- 6.65. a)  $(3, 3)$  b)  $(3, 3), (7, 1)$  c)  $(2, 3), (-4, 2)$  d) układ sprzeczny

- 6.66. a)  $(-5, 2), (-4, -1)$  b)  $(2, 1), (4, 0)$  c)  $(2, 3), \left(3\frac{3}{5}, 2\frac{1}{5}\right)$  d)  $(-6, -2)$

- 6.67. a)  $(3, 0), \left(-2\frac{2}{5}, -1\frac{4}{5}\right)$ ; prosta jest sieczną okręgu

- b)  $(-5, 1)$ ; prosta jest styczną do okręgu

- c)  $(-4, -4), (-6, -2)$ ; prosta jest sieczną okręgu

- d) prosta jest styczną z okręgiem

- 6.68. a)  $(-2, 2), (1, 4)$  b) nie ma punktów wspólnych c)  $(3, 2), (2, 4)$  d)  $(4, 3)$

- 6.69. a) d)  $x = 3, y = 10$  b)  $x = 3, y = 13$  c)  $x = 4, y = 3$

- b)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ ,  $k: y = x - 1$ ,  $\left(\frac{4 - \sqrt{22}}{2}, \frac{2 - \sqrt{22}}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{4 + \sqrt{22}}{2}, \frac{2 + \sqrt{22}}{2}\right)$

- c) p)  $y = 2x - 16$ ,  $k: x + y = 0$ ,  $(-8, 8)$  d)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

- d) p)  $x = 4, y = 5$  k)  $x = 3, y = 0$  d)  $x = 1$

- 6.70. a) suma dwóch prostych:  $y = x, y = -x$

- b) suma dwóch prostych:  $y = x + 3, y = -x - 3$

- c) punkt  $(1, 2)$

- d) prosta  $x = 4, y = 0$

- e) suma dwóch prostych:  $x = 0, y = 2x$

- f) suma dwóch prostych:  $y = 2x + 3, y = -2x - 1$

- 6.71. a)  $(2, 3)$  b)  $(0, 3)$  c)  $(1, 4)$  d) układ jest sprzeczny

- 6.72. a)  $(-5, -2), (-3, 2), (1, -4)$ ; suma prostych, okrąg

- b)  $(-2, -1), (2, -1)$ ; okrąg, parabola

- c)  $(-2, 1), (-1, 4), (1, 4), (2, 1)$ ; okrąg, parabola

- d)  $\left(-2\frac{1}{5}, 4\frac{1}{5}\right), \left(-2\frac{1}{5}, 4\frac{2}{5}\right), (1, -2), (1, 2)$  okrąg, suma dwóch prostych

- e)  $\frac{1}{3}, \frac{25}{9}$  f)  $(2, 0), (3, 1)$ ; suma dwóch prostych, parabola

- f)  $(-4, -4), (-1, 2), (-2, 2), (1, -4)$ ; parabola, suma dwóch prostych

32.  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 37 & 25 \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

33. a)  $A(4, 4)$ ,  $\sigma = 1$   
 b)  $B(1, 1)$ ,  $C(-1, 9)$   
 c)  $x^2 + (y - 5)^2 = 17$ ; *wskazówka* Zauważ, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny, więc środek tego okręgu jest (środkiem przeciwprostokątnej)
34.  $A_1(\sqrt{5} - 2, \sqrt{5} - 1)$ ,  $B_1(\sqrt{5} - 2, \sqrt{5} + 1)$ ,  $C_1(\sqrt{5} - 2, \sqrt{5} - 1)$
35. a)  $A(2)$ ,  $B(2\frac{1}{25}, 6\frac{6}{25})$  b)  $\dots$  sposób 5: skorzystał ze współrzędnych punktów  $A$ ,  $B$  i obliczył tangens kąta nachylenia prostej  $AB$  6 sposób: Zauważ, że prosta  $AB$  jest równoległa do symetralnej odcinka którego końcami są środki okręgów

## 7. Geometria płaska – rozwiązywanie trójkątów, pole trójkąta, pole kąta

### Twierdzenie sinusów

- 7.1. a)  $\sqrt{3}$  b) 4 c) 2 d) 13
- 7.2. a)  $AB = 8,3$  cm b)  $AC = 10,5$  cm
- 7.3. a)  $AC = 5,9$  cm b)  $AB = 5,3$  cm
- 7.4. a)  $b = 32$  cm b)  $c = 13,9$  cm
- 7.5. a) 6 cm b) 9 cm c)  $10\frac{1}{6}$  cm d) 8,5 cm
- 7.6. a)  $a = 5$  cm b)  $a = 24$  cm c)  $c = 5$  cm d)  $b = 14,34$  cm
- 7.7.  $(\angle A = 60^\circ, \angle C = 90^\circ)$  lub  $(\angle A = 120^\circ, \angle C = 30^\circ)$
- 7.8.  $\angle B = 105^\circ$ ,  $\angle C = 45^\circ$ , lub  $\angle B = 15^\circ$ ,  $\angle C = 135^\circ$
- 7.9. a)  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$  b)  $5 + 4\sqrt{3}$
- 7.10. a) 120 b)  $R = \sqrt{6}$

### Twierdzenie cosinusów

- 7.14. a)  $3\sqrt{13}$  b)  $2\sqrt{5}$
- 7.15.  $\cos \alpha = \frac{53}{80}$ ,  $\cos \beta = \frac{25}{32}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{20}$  trójkąt rozwartokątny
- 7.16. a) trójkąt ostrokątny  $\alpha = 80^\circ$  b) trójkąt rozwartokątny  $\alpha = 100^\circ$  c) trójkąt prostokątny  $\alpha = 90^\circ$
- 7.17. 60
- 7.18.  $120^\circ$
- 7.19. a)  $\sqrt{10}$  cm,  $\sqrt{58}$  cm b)  $\sqrt{34 + 15\sqrt{3}}$  cm,  $\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$  cm

- 7.20.  $AC = 3$  cm lub  $AC = 5$  cm
- 7.21. a)  $BC = 4$  cm b)  $BC = 2\sqrt{6}$  cm
- 7.22. Jeśli  $\angle ACB = 90^\circ$  to obwód jest równy 16 cm. Jeśli  $\angle ACB \neq 90^\circ$  to obwód jest równy  $2(5 + \sqrt{17})$  cm
- 7.23. 9
- 7.24.  $5,5\sqrt{2}$  cm
- 7.25.  $CD = 7$  cm,  $BE = 2\sqrt{19}$  cm
- 7.26. a)  $CD = \frac{3\sqrt{46}}{2}$  cm b)  $R = \frac{12\sqrt{222}}{35}$  cm
- 7.27.  $CD = 7$  cm. Niech punkt  $D$  będzie środkiem odcinka  $CE$ . Oblicz długość przekątnej  $CE$  w równoległoboku  $ADEC$ .

### Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów do rozwiązywania zadań

- 7.30.  $(|AC| = |BC| = 16,17, \angle A = \angle B = 77^\circ, \angle C = 36^\circ)$  lub  
 $(|AC| = |BC| = 5,25, \angle A = \angle B = 18^\circ, \angle C = 144^\circ)$
- 7.31. a)  $AB = 96$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 83^\circ$   
 b)  $AB = 9,34$ ,  $\angle B = 4^\circ$ ,  $\angle C = 80^\circ$  lub  $AB = 3,24$ ,  $\angle B = 79^\circ$ ,  $\angle C = 7^\circ$
- 7.32. a)  $AB = 29\sqrt{3}$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$   
 b)  $AB = 1,7757$ ,  $\angle A = 64^\circ$ ,  $\angle C = 86^\circ$  lub  $AB = 99,54$ ,  $\angle A = 116^\circ$ ,  $\angle C = 44^\circ$
- 7.34. a)  $(\alpha = 60^\circ, \gamma = 75^\circ, c = \sqrt{3} + 1)$  lub  $(\alpha = 120^\circ, \gamma = 15^\circ, c = \sqrt{3} - 1)$  b)  $\beta = 30^\circ$ ,  
 $a = 0,5$ ,  $c = \sqrt{3} - 1$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $a = 5\sqrt{3}$ ,  $b = 10$ ,  $d = a$ ,  $120^\circ = 15^\circ$   
 $b = 3\sqrt{2}$ ,  $c = \frac{\sqrt{6} - 3}{2}$
- 7.35. a)  $\dots$  Wykaż, że  $\angle ADC = 60^\circ$ . Następnie zastosuj twierdzenie cosinusów do wyznaczenia długości boków trójkąta  $ABC$  i trójkąta  $ACD$ .
- 7.36.  $AD = 1$ ,  $BF = \sqrt{3}$ ,  $DE = 4 - 2\sqrt{3}$ . Oznacz  $\angle D = \gamma$ ,  $\angle C = \alpha$ . Skorzystaj z twierdzenia sinusów w trójkącie  $ADC$  wykaż, że  $\gamma = 2\sqrt{2}$ . Następnie skorzystaj z twierdzenia cosinusów do kąta  $OAC$ .
- 7.38. *wskazówka* Oznacz  $a = 4x$ ,  $b = 5x$ ,  $c = 6x$ ,  $x > 0$ . Następnie oblicz  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$ , korzystając z twierdzenia cosinusów.
- 7.39. *wskazówka* Zastosuj twierdzenie cosinusów do trójkąta  $ADC$  i do trójkąta  $DBC$ .

740. Z twierdzenia sinusów:  $\frac{|BC|}{\sin \alpha} = \frac{|AC|}{\sin \beta}$  stąd  $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  D otrzymaną

równość  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{2}$  podnieś stronami do kwadratu

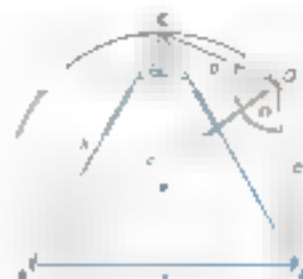
742. wskazówka Niech  $|CD| = d$ . Skorzystaj z twierdzenia sinusów w trójkątach  $ADC$  i  $DBC$  do wyznaczenia  $d$  w zależności od  $|AD|$  lub  $|DB|$  funkcji trygonometrycznej odpowiedniego kąta

745. Niech  $D$  należy do łuku  $BC$ ,  $|CD| = a$ ,  $|DB| = b$ ,  $|AD| = c$  Ze  $a + b = c$  Oznacz bok trójkąta  $ABC$  przez  $x$ .

Zauważ, że  $\alpha = \angle ADB = \angle ACB = 60^\circ$  oraz

$\beta = \angle CDA = \angle CBA = 60^\circ$  Zastosuj twierdzenie

cosinusów do kątów  $\alpha$  i  $\beta$  w trójkątach  $ABD$  i  $ADC$  następnie odejmij otrzymane równości stronami wyłącz wspólny czynnik  $(a + b)$  połącz nawias



746. a)  $|AD| = \sqrt{5}$ ,  $|AC| = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) wskazówka Wyznacz  $\cos 15^\circ$  z twierdzenia cosinusów dla kąta  $CBA$  Następnie wykaż, że  $\cos^2 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

d) wskazówka Daną zależność można zapisać w postaci  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 4$  Zauważ

że  $\frac{a}{b} = \frac{1}{\tan \alpha}$  gdzie  $\alpha$  jest miarą jednego z kątów ostrych tego trójkąta Po dokonaniu podstawienia otrzymujemy równanie które doprowadzimy do postaci  $\lg^2 \alpha - 4 \lg \alpha + 1 = 0$  Jedno z rozwiązań tego równania jest równe  $\lg 15$  uzasadnij, że drugie rozwiązanie jest równe  $\lg 75$  skorzystaj z faktu, że iloczyn tych rozwiązań jest równy 1

747. wskazówka Niech  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – długości boków tego trójkąta,  $h$  – wysokość poprowadzona odpowiednio na bok  $a$ ,  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ . Zauważ,

że  $h = b \sin \gamma$ ,  $h_1 = b \sin \alpha$ ,  $h_2 = a \sin \beta$  Z twierdzenia sinusów

$a = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$  Zatem  $h_2 = \frac{b \sin \gamma \sin \alpha}{\sin \beta}$  Wówczas  $b \sin \gamma = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}$  m

Oblicz  $b$ , następnie  $a + c$

Pole figury płaskiej

748. a) 20,5 b) 15,5 c) 32 d) 20

749. a)  $s = w + 4t$  b)  $\frac{3}{2}w + \frac{1}{2}s = r$  c)  $2s + \frac{1}{2}w = r$  d)  $\frac{5}{6}w$

Pole trójkąta, cz. 1

750. 3 cm

751. a) 12 cm b)  $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$

752.  $14\frac{14}{29} \text{ cm}$

753. 156 cm

754. 6,5 cm, 42 cm, 42 cm

755. 120 cm

756.  $294 \text{ cm}^2$

757.  $14\frac{2}{17} \text{ cm}$

758. a)  $|AB| = 20$ ,  $|AC| = |BC| = 5\sqrt{5}$ , wskazówka Poprowadź wysokość  $CD$  i oznacz  $|AD| = 4x$ , wówczas  $|DC| = \sqrt{5}x$  oraz  $|CD| = x$  b)  $h_A = 4\sqrt{5}$

759. a) wskazówka Wykaż, że  $a : b : c = 3 : 4 : 5$ , korzystając ze wzoru na pole trójkąta. b) 2,4

760.  $7\sqrt{3} \text{ cm}^2$

761.  $84 \text{ cm}^2$

762. a)  $35 \text{ cm}^2$  b)  $35\sqrt{3} \text{ cm}^2$  c)  $35\sqrt{2} \text{ cm}^2$

763.  $30^\circ$  lub  $150^\circ$

764. a)  $150^\circ$  b)  $6\sqrt{10 + 3\sqrt{3}} \text{ cm}$

765. a) 7 cm b)  $\frac{20\sqrt{3}}{7} \text{ cm}$

766. a) 5 cm, 5 cm,  $3\sqrt{10} \text{ cm}$  b)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$

767. 8 cm, 10 cm

772. a) 30 cm b) 40 cm

773.  $18 \text{ cm}^2$

774. a) 5 i 2 oraz 5 i 3 b) 18

776.  $\frac{34^2}{3}$

777.  $AB = 8 \text{ cm}$

779.  $84\sqrt{2} \text{ cm}^2$

780. a)  $\frac{24\sqrt{2}}{7}$  b)  $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

781. a) 3 i 3 Oznacz  $|CD| = x$  Zapisz sumę pól trójkątów  $ADC$  i  $CDB$  na dwa sposoby b)  $P_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$  3.  $P_{\triangle ABC} = 9$  3 i 3



782. a)  $3\sqrt{3}$  b) wskazówka: I sposób: Zauważ, że  $P_{\Delta DC} = P_{\Delta AB}$ . II sposób: Utwórz równoległobok  $AFBC$  i skorzystaj z twierdzenia cosinusów

783. a)  $|AB| = 2$ ,  $|AC| = |BC| = 2\sqrt{7}$  Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest równoboczny i oblicz  $AB$ . Następnie oblicz  $BC$ , korzystając z twierdzenia cosinusów w trójkącie  $ABC$ .

b)  $\sin \angle ACB = \frac{3\sqrt{3}}{14}$  więc  $\angle ACB = 30^\circ$

784. a)  $75 \text{ cm}^2$  b)  $2\sqrt{13} \text{ cm}$

785.  $|BC| = 10 \text{ cm}$ ,  $|AC| = 2\sqrt{10} \text{ cm}$  lub  $|BC| = 7,5 \text{ cm}$ ,  $|AC| = \frac{\sqrt{265}}{2} \text{ cm}$

Niech  $|AD| = h$ ,  $|CD| = x$ , wówczas  $|DB| = 4x$ ,  $P_{\Delta DC} = 6 \text{ cm}^2$ . Zatem  $x = 12$  oraz  $h = (4x)^2 = 100$ . Ostateczny układ równań sprowadź do równania dwukwadratowego i rozwiąż je.

Pole trójkąta, cz. 2

787.  $r = 9 \text{ cm}$

788.  $42 \text{ cm}$

789. a)  $4,5(1+\sqrt{3}) \text{ cm}^2$  b)  $r = \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \text{ cm} \approx 1,3 \text{ cm}$

790. a)  $32 \text{ cm}$  b)  $r = 3 \text{ cm}$

791. a)  $14 \text{ cm}$ ,  $25 \text{ cm}$ ,  $25 \text{ cm}$  b) kąt  $\alpha$  jest ostry (dlaczego?);  $\sin \alpha = \frac{236}{625}$  więc

$$\frac{1}{2} < \sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ stąd } 30^\circ < \alpha < 45^\circ$$

792.  $11,2 \text{ cm}$

793. a)  $17 \text{ cm}$  b)  $R = 9\frac{15}{30} \text{ cm}$

794. a)  $192 \text{ cm}^2$  b)  $54$  c)  $32$  d)  $R = 36\frac{2}{3} \text{ cm}$

795.  $24 \text{ cm}$  b)  $r = 4 \text{ cm}$

796. a)  $34 \text{ cm}$  b)  $r = 7 \text{ cm}$

797. a)  $\frac{84}{85}$  b)  $28 \text{ cm}$  c)  $14\frac{1}{6} \text{ cm}$  Oblicz cosinus kąta między ramionami i skorzystaj z twierdzenia cosinusów

798. a)  $60^\circ$  b)  $7$  c)  $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$  d)  $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

799.  $25(2+\sqrt{3})$  Oblicz najpierw długość najdłuższego boku, korzystając z twierdzenia sinusów. Następnie skorzystaj z twierdzenia cosinusów do wyznaczenia kwadratu długości ramienia.

7100.  $75\frac{3}{4}$

7101. a)  $14 \text{ cm}^2$  b)  $r = 3,5 \text{ cm}$  c)  $R = 10\frac{5}{8} \text{ cm}$

7102. a)  $33,6 \text{ cm}$ ;  $15 \text{ cm}$ ;  $21\frac{7}{13} \text{ cm}$  b)  $\frac{5}{13}$  c)  $R = 32,5 \text{ cm}$

7103. a)  $32\sqrt{2} \text{ cm}$  b)  $r = 2\sqrt{2} \text{ cm}$  Skorzystaj z twierdzenia o odcinkach stycznych.

7104. a)  $P = 13,4 \text{ cm}^2$  b)  $9,6 \text{ cm}$  Oblicz długość odcinków na jakich prosta podzieliła przeciwprostokątną. b)  $r = 1,2$

7105.  $64 \text{ cm}^2$

7106.  $240 \text{ cm}^2$

7107.  $25 \text{ cm}$

7108.  $41 \text{ cm}$

7109.  $2\sqrt{13} \text{ cm}$

Pola trójkątów podobnych

7110.  $6\sqrt{3}$

7111.  $1\sqrt{3} \text{ cm}$

7112. a)  $25$ ,  $64$  b)  $1$ ,  $4$  c)  $4$ ,  $25$  d)  $9$

7113. a)  $4$ ,  $25$ ,  $36$  b)  $4$ ,  $21$ ,  $34$

7114.  $1$ ,  $7$ ,  $9$

7115.  $|A_1B_1| = 14 \text{ cm}$ ,  $|AB| = 21 \text{ cm}$

7116.  $1$ ,  $3$ ,  $4$

7117.  $24$ , wskazówka: Poprowadź wysokość  $CD$  oblicz pola trójkątów  $ADC$  oraz  $DBC$

7118. a)  $12 \text{ cm}$  b)  $288 \text{ cm}^2$

7119.  $11\frac{23}{27} \text{ cm}^2$

7120.  $21\frac{1}{3} \text{ cm}^2$

7121.  $|DB| = 5 \text{ cm}$ ,  $|BE| = 4 \text{ cm}$ ,  $|DE| = 3 \text{ cm}$

7122.  $36\%$

7123.  $5$ ,  $4$

7124.  $300 \text{ cm}^2$

7125.  $6 \text{ cm}^2$

7126 a) 25 cm b)  $P_{\Delta} = 250 \text{ cm}^2$   $P_{\text{los}} = 40 \text{ cm}^2$  c)  $30^\circ$

7127 b)  $168 \text{ cm}^2$

7128 a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{1}{6}$  c) 3 d)  $\frac{1}{6}$  **Zauważ, że  $\triangle ADS \cong \triangle SEC$**

7130  $\frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$ ; oznacz  $EF = x$   $EB = y$  utworz układ równań z niewiadomymi  $x$  i  $y$

**Pole koła, pole wycinka koła**

7131 a)  $\frac{5}{8}$  b)  $\frac{3}{4}$

7133 a)  $4,5\pi \text{ cm}^2$  b)  $60\pi \text{ cm}^2$  c)  $3,75\pi \text{ cm}^2$

7134 a) 8 cm b) 5 cm c) 30 cm

7135 a)  $\pi = 2$  b)  $\pi = 2,25\sqrt{3}$  c)  $15\pi = 9$

7136 36 cm

7137  $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

7138  $9\pi \text{ cm}^2$

7139 a)  $(3+2\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2$  b)  $(7+4\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$

7140  $6\pi \text{ cm}^2$ ; **wskazówka**: Wykaż, że  $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$

7141  $2(3\sqrt{3} - 2\pi) \text{ cm}$

7142 a)  $\frac{3\sqrt{3}}{6}r$  b)  $\frac{3\sqrt{3}}{6}r$  **Niech  $O_1$  i  $O_2$  będą środkami kół  $A_1$  i  $A_2$  i jednym z punktów przecięcia się okręgów. Zauważ, że trójkąt  $O_1 O_2 A_1$  jest równoboczny**

7143  $\frac{5}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{6}$

7144 45

**Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń**

7145 **wskazówka**: Przedstaw pole trójkąta  $ABC$  na dwa sposoby:  $P = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin \alpha$  oraz  $P = P_{\Delta ABE} + P_{\Delta CBE}$

7146 Rozpatrz dwa przypadki: krótszy bok zawiera się w boku dłuższego  $b$  albo w boku dłuższego  $a$ . Przedstaw pole trójkąta jako sumę pól odpowiednich trójkątów  $\Delta ABE$  i  $\Delta CBE$ . Wtedy  $ab \sin \alpha = \frac{ab \sin \alpha}{2} + \frac{ab \sin \alpha}{2}$ . Za  $b = a - 2b$  wtedy  $2a - b = 2a - b$   $a - 2b = a - 2b$   $a = 2b$

7147 **wskazówka**: Przedstaw pole trójkąta  $ABC$  jako sumę pól trójkątów  $AMC$  i  $MBC$

7148, **wskazówka**: Wykorzystaj zależności:  $a = \frac{2P}{h_a}$   $b = \frac{2P}{h_b}$   $c = \frac{2P}{h_c}$

7149 **wskazówka**: Wykorzystaj własność: środkowa w trójkącie dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach. Następnie skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta: w punkcie  $d$  do trójkątów  $ABC$  i  $ADC$ , w punkcie  $b$  do trójkątów  $ADC$  i  $DBC$

7151 **wskazówka**: Przedstaw teraz pól trójkątów  $ADC$  i  $DBC$  na dwa sposoby

7152 **wskazówka**: Wyraz pole  $P$  trójkąta za pomocą sumy pól trójkątów  $ABM$  i  $BCM$   $AMC$ . Następnie wykorzystaj zależności:  $a = \frac{2P}{h_a}$   $b = \frac{2P}{h_b}$   $c = \frac{2P}{h_c}$

7153 **wskazówka**: Oznacz pole trójkąta przez  $P$ . Wówczas  $a = \frac{2P}{h_a}$   $b = \frac{2P}{h_b}$   $c = \frac{2P}{h_c}$

$$c = \frac{2P}{h_c} = \frac{28P}{d}$$
 Zatem  $a = b = c = 9, 10, 14$

7154 **wskazówka**:  $\frac{ab}{x} = y$

Oznaczmy promień okręgu przez  $r$  wówczas  $x = a + r$   $y = b + r$ . Wystarczy pokazać, że  $a + r = (b + r) \cdot P$ . Wyraz pole trójkąta w postaci sumy pól czterech trójkątów zaznaczonych na rysunku: kwadratu o boku  $r$



7155  $\frac{2P}{a} = \frac{2P}{b} = \frac{2P}{c} = 9$  stąd  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{9}{a+b+c}$  więc

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = 9$$
 Przekształć równość do postaci:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{a} = \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = 6$$
 Następnie skorzystaj z własności dla dowolnych

liczb dodatnich  $x, y$  prawdziwa jest nierówność  $\frac{x}{y} \geq 2$  przy czym równość

ma miejsce tylko wtedy, gdy  $x = y$

**Test sprawdzający do rozdziału 7.**

Międzianka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Odpowiedź	B	C	C	A	B	D	C	B	C	D	C	B	D	A	A

**Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7.**

16.  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ ,  $\gamma = 15^\circ$

17 a)  $\{a = 60, b = 75, c = \sqrt{3} + 1\}$  lub  $\{a = 120, b = 15, c = \sqrt{3} + 1\}$  b)  $\beta = 30^\circ$

105  $c = \sqrt{3} + 1$  c)  $\gamma = 30^\circ$  d)  $\alpha = 90^\circ$   $a = 5\sqrt{3}$   $b = 10$

$$b = 3\sqrt{2}$$
  $c = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

18.  $10, 10, 10\sqrt{2}, \sqrt{2}$
19. a)  $30^\circ, 30^\circ$  b)  $2 \text{ cm}$  c)  $2\sqrt{7} \text{ cm}$
20.  $12 \text{ cm}$
21.  $r = 6 \text{ cm}$
22. a)  $126 \text{ cm}^2$  b)  $\frac{83}{65}$  c)  $r = 4\frac{2}{3} \text{ cm}$  d)  $R = 10\frac{5}{6} \text{ cm}$
23. a) 7 b)  $k = \frac{20\sqrt{3}}{7}$  c)  $d = \frac{40\sqrt{3}}{13}$  d)  $s = \frac{\sqrt{129}}{2}$
24. a)  $17 \text{ cm}$  b)  $r = 6 \text{ cm}$
25. a)  $c = 9 \text{ cm}$  b)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\sin \beta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ,  $\sin \gamma = \frac{3\sqrt{5}}{7}$
26.  $10\sqrt{9-2\sqrt{3}}$
29.  $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$
30.  $60 \text{ cm}^2$
31.  $\frac{25}{64}$
32.  $4 \text{ cm}$ ; wskazówka Wykaż, korzystając z własności kątów wpisanych w koło, że trójkąt  $EBD$  jest podobny do trójkąta  $ACF$ . Skala tego podobieństwa jest równa 3, więc  $|EB| = 3 \cdot 4$ .
33. a)  $r = 8 \text{ cm}$  b)  $225^\circ$
34. a)  $|DB| = 4,5 \text{ cm}$  b)  $\frac{9}{16}(4-3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$
36. a)  $93,6 \text{ cm}$  b)  $14\frac{1}{12} \text{ cm}$ ,  $9\frac{11}{12} \text{ cm}$  c)  $\frac{65}{119} = 0,298$
37. Wykaż że  $\angle AMB = 180^\circ - \angle ACB$  następnie zastosuj twierdzenie sinusów w obu trójkątach do boku  $AB$ .
38. wskazówka Skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta  $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ . Następnie oblicz tangens jednego z kątów ostrych danego trójkąta.
40. Oznacz długość boku  $AB$  jako  $AB = 5x$  wówczas  $|AC| = 4x$ ,  $|BC| = 3x$ . Wykaż, że  $r = x$ .

## B. Wielomiany

## Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej

- 8.1. Wielomiany są w przykładach: a, b, e, g, h, i.
- 8.2. a) 8 b) 17 c) 48 d) 21
- 8.3. a) 3 b) 6 c) 5 d) 3
- 8.4. a)  $F(x) = 10 - x^2 + 8x^3$ , st.  $F(x) = 4$ ,  $a_0 = 10$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 8$   
d)  $W(x) = 1$  st.  $W(x) = 2$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$
- 8.5. a)  $F(x) = 5x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ ,  $F(x) = 4$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = 5$   
b)  $G(x) = 0$ ; st.  $W(x) = 0$ ;  $a_0 = 8$
- 8.7. a)  $W(3) = 56$ ,  $W(1) = 2$ ,  $W(4) = 7$ ,  $W(5) = 32$   
b)  $W(\sqrt{2} + 1) = 3\sqrt{2} - 5$ ,  $W(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6} - 9\sqrt{3} + 1\sqrt{2} - 4$
- 8.8. a) np.  $W(x) = 3x^4 + x^2 + 8$  b) np.  $W(x) = x^4 + \sqrt{2}x^4$
- 8.9. a) 0 b) 1 c) 1 d) -32
- 8.10.  $a = 2$
- 8.11. a) 4 b) 1
- 8.12. a) 3 b) 5
- 8.13. b) 4
- 8.14.  $a = 0$
- 8.15. a) 2 b) 3
- 8.16.  $a = 2$  lub  $a = 1\frac{1}{2}$
- 8.17.  $(a = 8, b = 12)$  lub  $(a = 3, b = 12)$
- 8.18. a)  $a = 7$  b) 5 c) 4 b)  $a = 2$  b)  $x^6$  lub  $a = 2 + b = 8$
- 8.19. a) jeśli  $m \in \mathbb{R}$  i  $1 \neq 1$  to st.  $W(x) = 3$ ; jeśli  $m = 1$  to st.  $W(x) = 2$  jeśli  $m = 1$  to st.  $W(x) = 0$   
b) jeśli  $m \in \mathbb{R} = \{-2, 3\}$  to st.  $W(x) = 4$ ; jeśli  $m = -2$ , to st.  $W(x) = 3$ ; jeśli  $m = 3$ , to st.  $W(x) = 2$
- 8.22. wskazówka Oblicz  $W(5)$  oraz  $W(1)$  zauważ, że  $W(5) - W(1) = 305$ . Jeśli współczynniki byłyby całkowite, to lewa strona otrzymanej zależności byłaby parzysta, a prawa – nieparzysta, co prowadzi do sprzeczności.
- Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów**
- 8.23. a)  $x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$  b)  $12x^4 - x^4 - 4x^3 - x^3 - 1 - 4x^2 - 2x^2 - 3 = 11x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 3$  d)  $2x$
- 8.24. a)  $x^4 - 6$  b)  $8x^4 - 0 - x^3$  c)  $2x^6 - \sqrt{2}x^5 - 2\sqrt{2}x^4 - 4x^3 -$   
d)  $(\sqrt{2} - 1)x^4 - (1 - 3\sqrt{3})x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 1 - \sqrt{2}$
- 8.25. a)  $3x^4 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 2x^4 - 2x^3 - 2x^2$  b)  $4x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 2x + 6$  d)  $4x^4 - 6x^3$

- 8.26 d)  $F(x) = 3x^6 - 7x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 1$  e)  $F(x) = 3x^6 - 5x^5 - 14x^4 - 5x^3 - 3x^2$   
 f)  $F(x) = 6x^6 - 8x^5 - 13x^4 - 14x^3 - 6x^2 - 5$
- 8.27 a)  $2x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 3x - 14$  b)  $6x^4 + 2x^3 - x^2 - 2$   
 c)  $x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x - 9$  d)  $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 8$
- 8.28 a)  $3x^3 - 4x^2 - 3x - 4x + 2$   
 b)  $4x^3 - 3x^2 + 9x^2 - 10x^2 + 5x - 1$   
 c)  $36x^5 - 27x^5 - 39x^5 - 36x^5 + 4x^2 - 12x + 4$   
 d)  $3x^3 + 10x^2 - 6x^3 + 4x^3 - 8x^3 - 5x + 8x - 2$
- 8.29 a)  $x^3 - x^2 - x^2 - x^2$  b)  $x^3 + x^2 - x^2 - x^2$   
 c)  $x^3 - x^3 + x^3 - x^3 - x^3 - x^3$  d)  $x^3 - x^3 - x^3 + x^3 - x^3 - x^3$
- 8.30 a)  $4x^3 - 16x^2 - 25x^3 - 60x^2 - 36x^3$  c)  $9x^4 + 12x^3 - 4x^2$  d)  $8x^4 - 4x^3$
- 8.31 a)  $4x^4 - 4x^3$  b)  $12x^4 - 8x^3$  c)  $10x^4 - 2x^3 - 1$  d)  $5x^4 - 4x^3 - 25x^2$
- 8.32 a)  $x^7 - x^5 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 6x + 1$  b)  $3x^3 + 6x^2 - x^2 - 3x^3 - 12x^2 = 17x + 5$   
 c)  $x^3 + 2x^2 + 24x - 6x + 2$  d)  $9x^2 + 6x - 2x - 5$
- 8.33 a) st.  $W(x) = 13$ ;  $a_0 = -125$ ,  $a_{11} = -24$  b) st.  $W(x) = 30$ ;  $a_0 = 2$ ,  $a_{10} = 12$   
 c) st.  $W(x) = 6$ ;  $a_0 = -5$ ,  $a_1 = 18$  d) st.  $W(x) = 20$ ;  $a_0 = 0$ ,  $a_{10} = 38$
- 8.34 a)  $-6x^8 + 7x^8 - 11x^3 + 10x^4 + 2x^5 - 4x^4 - 5x^2 + 7x^2 + 7x + 2$   
 b)  $6x^8 - 4x^8 - 5x^4 + 7x^3 - 1x^3 - 11x^3 + 15x^2 + 3x - 12$   
 c)  $-5x^7 + 12x^5 - 17x^2 + 44x^2 - 51x^3 + 28x^2 - 27x + 4$   
 d)  $6x^{13} - 12x^{13} + 9x^{13} - 10x^{13} + 20x^8 - 42x^6 + 5x^2 + 10x^6 + 2x^5 + 19x^5 - 15x^5 + 4x^5 + 10$

### Równość wielomianów

- 8.37. Wielomiany są równe w punktach: a), b), d).
- 8.38 a)  $a = -2$  b) nie istnieje c) nie istnieje d)  $a = -2$
- 8.39 a)  $a = 3$  b)  $a = 2$  c)  $a = 3$  d)  $a = 1$
- 8.40 a)  $a = 1$  b)  $a = 3$  b) nie istnieją; wyznaczyć:  $(2ax - b)^3 = (2ax - b)^2(2ax - b)$   
 c)  $a = 2$  b)  $a = 3$  d)  $a = b = 2$
- 8.41 a)  $a = 1$  b)  $a = 5$  b)  $a = 3$  b)  $a = 1$
- 8.42 a)  $a = 2$  b)  $a = 3$  b)  $a = 1$  b)  $a = 3$
- 8.43 a)  $b = 2$  c)  $a = 4$  b)  $b = 5$  c)  $a = 1$
- 8.44 a)  $a = 1$  b)  $a = 5$
- 8.45 a)  $a = 3$  b)  $a = 1$
- 8.46 a)  $a = 3$  b)  $a = 3$  m)  $a = 6$ ,  $n = 15$  lub  $(a = 3$  b)  $a = 3$ , m)  $a = 6$  n)  $a = 3$   
 b)  $a = 2$  b)  $a = 3$ , m)  $a = 10$  n)  $a = 9$   
 c)  $(a = 3$  b)  $a = -2$ , m)  $a = -6$ , n)  $a = 12$ ) lub  $(a = 3$  b)  $a = -2$ , m)  $a = 6$ , n)  $a = -12$ ) lub  
 $(a = 1$  b)  $a = 2$ , m)  $a = -2$ , n)  $a = -4$ ) lub  $(a = 1$  b)  $a = 2$ , m)  $a = 2$ , n)  $a = 4$ )  
 d)  $a = 2\sqrt{2}$  b)  $a = -1$ , m)  $a = -4\sqrt{2}$ , n)  $a = 4\sqrt{2}$ ) lub  
 $a = 2$ , b)  $a = 1$  m)  $a = 4\sqrt{2}$  n)  $a = 4\sqrt{2}$  lub  $(a = 2$  b)  $a = 1$ , m)  $a = 4$  n)  $a = -4$ )  
 lub  $(a = 2$  b)  $a = 1$  m)  $a = 4$ , n)  $a = 4$ )

### Wzory skróconego mnożenia stopnia 3. Wzór na $a^3 - b^3$

- 8.47 a)  $y = 3y^2 - 3y^2 + x$  b)  $8 = 12a - 6a - a$  c)  $1 = 9a - 27a - 27x$   
 d)  $4 = 3 \cdot 9 - 3 \cdot 3$  e)  $125 = 75b - 15b - b$  f)  $x^3 = 12x - 48x - 64$   
 g)  $4x = 36x + 54x - 27$  h)  $1 = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 4$
- 8.48 a)  $10 = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 3$  b)  $44 = 18 \cdot 3 - 6 \cdot 3$  c)  $62 \cdot 2 = 55$  d)  $200 \cdot 2 = 101 \cdot 2$   
 e)  $10 = 3 \cdot 3 - 6 \cdot 3$  f)  $12 = 9 \cdot 3 - 9 \cdot 3$  g)  $12 = 24 \cdot 2 - 12 \cdot 4$   
 h)  $205 = 30 \cdot 3 - 60 \cdot 3$
- 8.49 a)  $x^3 = 0^3$  b)  $27 = x$  c)  $y = 64$  d)  $8 = y^3$  e)  $x^3 = 125$  f)  $2\sqrt{2} = x^3$
- 8.50 a) 3 b) 17 c) 5 d) 7
- 8.51 a)  $3x^3 - 9x = 7$  b)  $3x^3 + 18x = 6$  c)  $3x^3 - 3x + 2$   
 d)  $2x = 9a - 27x - 5a$  e)  $2x^3 = 12x - 48x - 64x$  f)  $2x^3$
- 8.52 a)  $x^3 + 4x = 25$  b)  $6x^3 - 39x = 38x - 25$  c)  $7x = 9x - 15x - 2$   
 d)  $-4x^2$  e)  $x^3 + 7x^2$  f)  $26x^3 - 39x^2 = 33x - 20$
- 8.53 a)  $x \in \left[ -\frac{5}{2}, 2 \right]$  b)  $x \in \left[ -\frac{5}{8}, 1 \right]$  c)  $x \in \left[ -\frac{5}{9}, 1 \right]$  d)  $x \in \left[ -9, 1 \right]$
- 8.54 a)  $x \in \left[ -\infty, 5 \right)$  b)  $x \in \left[ 1, 2 \right]$  c)  $x \in \left[ 1, 4 \right]$  d)  $x \in \left[ 1, 2 \right]$
- 8.55 a)  $x = 1$  b)  $x = 0$  c)  $13 = x^3$  d)  $12 = 3y$  e)  $11 = 2x^2$  f)  $11 = 5y$
- 8.56 a)  $y = 4(1+y - 2y + 4)$  b)  $1 = 4(1+x - x)$  c)  $3x = 1(9x - 3x - 1)$   
 d)  $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$  e)  $(4 + 3y)(16 - 12y + 9y^2)$   
 f)  $(5a + b)(25a - 30ab - 36b)$  g)  $\sqrt{5} = 1(5 - \sqrt{5}a + \sqrt{5}a)$  h)  $y = 2(1(y - \sqrt{2}y - 2)$
- 8.57 a)  $\frac{2 \cdot 9}{5}$  b)  $\frac{\sqrt{4}}{6}$  c)  $\frac{2 \cdot 25}{5}$  d)  $\frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{7} \cdot \sqrt{4}$  e)  $\frac{9 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{25}}{16}$   
 f)  $\frac{\sqrt{4} + \sqrt{5}}{31}$  g)  $\frac{\sqrt{2}}{31}$  h)  $\frac{9 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}}{12}$
- 8.58 a)  $x \in \{-35, 33\}$  b)  $x \in \{-\infty, -10\} \cup \{0, +\infty\}$  c)  $x \in \{-12, 8\}$   
 d) równanie sprzeczne e)  $x \in \mathbb{R}$  f) nierówność sprzeczna

### Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu

- 8.51. a) **wskazówka** Wykaż, że  $(\sqrt{3} + 1)^3 = 5\sqrt{3} + 10$
- 8.52. **wskazówka** Niech  $a = 6n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wykaż, że liczba  $3^{6n-1} - 3$  jest podzielna przez 13, wyliczając najpierw 3 potęgi liczb.

## Podzielność wielomianów

8.84. **wskazówka** Skorzystaj z potężnych wzorów skróconego mnożenia8.85. **wskazówka** Przedstaw trójmiany kwadratowe w postaci iloczynowej.8.87. a)  $(x+1)(x-3)$ 8.88. np.  $5x(4-x)(x+2)$ ,  $x^2(x+2)$ ,  $x^2(4-x)$ 8.90. **wskazówka** Zapisz trójmian kwadratowy  $P(x)$  w postaci iloczynowej8.91. **wskazówka** Zapisz trójmian kwadratowy  $P(x)$  w postaci iloczynowej.8.93. **wskazówka**  $P(x) = (x+2)^2$ 8.94. a)  $P(x) = 3x+4$  b)  $P(x) = 3x+4$  c)  $P(x) = -x+1$ 

8.95. a = 7 b = 2

8.96. a = 5, b = 2

8.97. a = 10 b = 3

8.98.  $P(x) = 3x - 2$ 8.99.  $P(x) = 2x - 3$ 8.100.  $P(x) = 4x^2 - 20x + 25$ 8.101.  $Q(x) = x^2 - 6x + 36$ 8.102.  $Q(x) = 5x^2 - 7x - 3$ 8.103. a)  $Q(x) = x^2 + 1$  b)  $Q(x) = x^2 + 1$ 8.104.  $P(x) = 2x - 1$ 8.105.  $Q(x) = x^3 - x^2 - 5x + 3$ 8.106.  $P(x) = 3x^2 - 6x^2 + 4x - 8$ 8.107.  $Q(x) = 7x^2 - 45x + 79$  a = 2, b)  $Q(x) = 7x - 1$ 

## Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy. Schemat Hornera

8.108. a)  $x^2 - 4x + 4$  b)  $x^2 - 4x + 7$  c)  $x^2 - x + 1$  d)  $x^2 - 6x + 6x + 3$ 8.109. a)  $100x^2 - 80x + 15$  b)  $38x^2 - 2x - 2$  c)  $16x^2 - 4x - 8x + 4$  d)  $2x^2 - 2$ 8.110. a)  $x^2 - 6x + 9$  b)  $3x^2 - 2x + 1$  c)  $x^2 - 8x + 4$  d)  $x^2 + 4$ 8.111. a)  $3x^2 - 8x + 17$  b)  $2x^2 - 2x + 2$  c)  $4x^2 - 4x - 7x + 3$  d)  $3x^2 - 3x - 16$ d)  $3x^2 - x - 23x - 63$  e)  $185$  f)  $x^4 - 3x^3 - 13x^2 - 41x - 23$  g)  $368$ f, g +  $2x^2 - x^2 + 2x - 6x - 12$  h)  $25$ 8.112. a)  $x^2 - 3x + 4$  b)  $x^2 - x + 1$  c)  $3x^2 - x + 3$  d)  $x^2 - x + 5$ 8.113. a)  $3x^2 + 2x - 1$  b)  $2x^2 - 4x^2 + 6$  c)  $3x^2 + 6x + 9$  d)  $5x^2 + 10x + 5$ 8.114. a)  $x^2 - x + 2$  b)  $2x^2 - 4x + 9$  c)  $x^2 - x + 3$ d)  $5x^2 - 10x + 3$  e)  $2x^2 + 2x + 2x + 3$  f)  $3x^2 - 3x - x + 1$ 8.115. a) 3, b) 7 c)  $x^2 - 2x + 4$  d)  $3x^2 - 6x - 12x + 22$  e) 52e)  $5x^2 + 5x^2 + 7x^2 + 7x + 7$ ,  $r = 14$  f)  $-2x^2 + 6x^2 - 14x^2 + 42x - 126$ ,  $r = 384$ 8.116. a)  $2x^3 + 2x^2 + 2x^1 + 2x^0 + 5x - 5$ ,  $r = -10$  b)  $-3x^3 - 6x^2 - 12x - 22$ ,  $r = -24$ c)  $x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$ ,  $r = 0$  d)  $x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$ ,  $r = 0$ e)  $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ ,  $r = 2$ f)  $x^4 + x^3 - x^2 + x^2 - x^2 + x + 1$ ,  $r = 1$ 

8.117. a) 9 b) 7 c) 10 d) 7

8.118. a)  $r = -18$ 8.119.  $m = 1$  lub  $m = 4$ 8.120.  $m = 3$  lub  $m = 2$ 8.121.  $a \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ 8.122.  $a \in \left( -1, 1 \frac{1}{2} \right)$ 

## Dzielenie wielomianu przez wielomian stopnia większego od 1

8.123. a)  $6x - 2$  b)  $x - \frac{1}{2}$  c)  $2x - 1$  d)  $2x - 4$ 8.124. a)  $x^3 + 2x$  b)  $x^4 - 3$  c)  $\frac{1}{3}x^3 - x$  d)  $\frac{1}{2}x + 1$  e)  $x^4 + x^2 + 5$  f)  $x^4 + 1$ 8.125. a)  $Q(x) = x^2 - 3$  b)  $R(x) = 3x - 5$ b)  $Q(x) \equiv 0$ ,  $R(x) = x^2 + 5$ c)  $Q(x) = x - 1$ ,  $R(x) = 0$ d)  $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{11}{6}x + \frac{1}{2}$ ,  $R(x) = \frac{16}{3}x + \frac{17}{3}$ e)  $Q(x) = 4$ ,  $R(x) = 24x^2 - 5$ f)  $Q(x) = x - 1$ ,  $R(x) = 0$ 8.126. a)  $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 3$ ,  $R(x) = -2$ b)  $Q(x) \equiv 0$ ,  $R(x) = x^4 - x^2 + 3x - 7$ c)  $Q(x) = x^3 + x^2 + 3$ ,  $R(x) = 3x^2 - x - 6$ d)  $Q(x) = x^3 - 2x + 1$ ,  $R(x) = 3x^2 + 5$ e)  $Q(x) = x^2 - 1$ ,  $R(x) = x^2 - 3x + 4x - 1$ f)  $Q(x) = x^2 - 3x^2 + 1$ ,  $R(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ 8.127.  $W(x) = -2x^5 - 8x^4 + x^3 + 11x^2 + 5x + 9$ 8.128.  $W(x) = 10x^5 - 14x^3 + 28x^2 - 41x + 7$ 8.129.  $R(x) = -x + 3$ 8.130.  $R(x) = -12x - 16$ 8.131.  $r = 22$ 8.132.  $r = 2$ 8.133.  $R(x) = 2x + 4$ 8.134.  $R(x) = -x + 1$ 

8.135. a = 4, b = 3

8.136. a = 7, b = 3

8.137.  $R(x) = x^2 + 2x + 3$ 8.138.  $R(x) = -3x^2 + 2x + 5$



B.139 a) 2 b) 6

B.140 a) 1 b) 1 lub 4, b) 2

**Pierwiastek wielomianu. Twierdzenie Bezouta**

B.141 a) tak b) tak c) nie d) tak

B.142 a) 3 b)  $\sqrt{1} \sqrt{3}$

B.143 a) st.  $W(x) = 6$ , pierwiastki:  $2, \frac{1}{2}$  b) st.  $W(x) = 6$  pierwiastki:  $5, 2, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, 3$

c) st.  $W(x) = 7$ , pierwiastki:  $0, \frac{1}{3}$  d) st.  $W(x) = 6$ , pierwiastki:  $-3, 3$

B.144 b) np.  $W(x) = x^2(x^2 - 5)(x^2 - 3)$  d) np.  $W(x) = (x + 2)^4(x^4 + 3)$

B.145 a) tak b) tak c) nie d) tak

B.146 a)  $k = 2$  b)  $k = 1$ ;  $k = \frac{2}{3}$  lub  $k = \frac{1}{2}$  d)  $k = 2$  lub  $k = \frac{1}{3}$

B.147 a)  $-5, 1, \frac{1}{3}$  b) 4 c)  $-3, 1, 3, \frac{1}{2}$  d)  $-1, -\frac{1}{4}, 2$  e)  $-2, 3$  f) 1

B.148 a) 5 b)  $2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$  c) 1,  $\frac{1}{2}$  d) nie istnieją inne pierwiastki

B.149 a) 1, 2 b) nie istnieją inne pierwiastki c) 3, 1, 3 d) 4, 4

B.150 a)  $a = -2$ ; pozostałe pierwiastki:  $-2, -1$  b)  $a = 3$ ; pozostałe pierwiastki:  $\frac{2}{3}, 3$

B.151 a)  $a = -7$ , pierwiastki:  $-2, \frac{1}{4}, 1$  b)  $a = 3$  pierwiastki:  $-3, -2, \frac{1}{2}$

B.152 a)  $a = 2, b = 1, x^3 = 1$  b)  $a = 1, b = -4, x^3 = -2$

B.153 a)  $a = 0, b = 7$ ; pierwiastki:  $3, 1, 2$  b)  $a = 8, b = 4$ ; pierwiastki:  $-4, \frac{1}{2}, 1$

B.156.  $W(x) = 3x^4 - 9x^2 - 18x + 24$ , wskazówka: st.  $W(x) = 3$  i wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumiany  $x + 2$ ,  $x - 1$  oraz  $x - 4$ ; zatem  $W(x) = a(x + 2)(x - 1)(x - 4)$ . Z warunku  $W(1) = 30$  oblicz  $a$  następnie doprowadź wielomian  $W(x)$  do postaci uporządkowanej

B.157.  $W(x) = 2x^4 + 11x^3 - 14x^2 - 9x + 18$

B.158.  $a_1 = 1, x_1 = 3, x_2 = 5, m = 23, n = -15$

B.159.  $a_1 = -1, x_1 = 3, x_2 = 9; a = 7, b = -21$

B.160.  $a \in \{-2, 2\}, b = 28, x \in \{1, 3, 5\}$

B.161.  $a \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}, b \in \{2, 4, 8\}$

**Pierwiastki wymierne wielomianu**

B.162. a)  $-3, -2, 1$  b) 2 c)  $-1, 1$  d)  $-2, -1$  e)  $-3, -2, 1, 3$  f)  $-4, 1$

B.164. Wskaz trzy liczby całkowite, które są pierwiastkami wielomianu  $W(x)$ , powołaj się na własność: Wielomian stopnia 3, może mieć co najwyżej trzy pierwiastki.

B.165. a)  $-2, 2$ ; wskazówka: Wyznacz pierwiastki wielomianu  $Q(x) = 4 - W(x)$  b)  $-3, 1, 2$  c)  $-4$  d)  $-4, -2, 1, 3$

B.166. a) 2 b)  $2, 1, \frac{1}{3}$  c)  $3, 4$  d)  $4, 2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}$

e) 2 f) 1 g)  $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2$  h)  $-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}$

B.167. pierwiastki całkowite wielomianu  $W(x)$ :  $2, -1$

B.168. wskazówka: Liczba 3 to jedyna liczba pierwsza, która jest dzielnikiem liczby 12.

B.169. a) 5 b) 7

B.170. a) 5; pierwiastki:  $-1, 1, 5$ ; wskazówka: Pierwiastki całkowite wielomianu  $W(x)$  znajdują się wśród liczb  $-1, 1, 5, -5$ . Sprawdź, że tylko liczby  $1, 1, 5$  spełniają warunki zadania

B.171. a)  $\frac{1}{5}$  b)  $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$  c)  $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}$  d)  $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  e)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

B.174. a)  $-5, 2, 3$  b)  $-1, 2, 7$  c)  $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ; wskazówka:  $W(x) = 2(6x^3 + 11x^2 + 6x + 1)$ .

Teraz zauważ, że wielomian  $Q(x) = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$  nie ma dodatniego pierwiastka. d)  $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ; wskazówka: Wyznacz wymierne pierwiastki wielomianu

$Q(x) = 12 - W(x)$ . a)  $\frac{1}{5}, 2, 5$  f)  $-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

B.175. a) 2 b)  $2, 1, \frac{1}{3}$  c)  $4, 2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}$  d)  $3, 4$

e) 1 f) 2 g)  $-2, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}$  h)  $-5, 3$

**Pierwiastek wielokrotny**

B.178. a) pierwiastki jednokrotne:  $\frac{1}{2}, 2$  pierwiastek dwukrotny: 9 b) pierwiastki jed-

nokrotne:  $5, \frac{2}{3}$  pierwiastek czterokrotny:  $\frac{2}{3}$  c) pierwiastek jednokrotny: 3,

pierwiastek dwukrotny: 3; pierwiastek trzykrotny: 2; pierwiastek czterokrotny: 2

d) pierwiastek dwukrotny:  $-\frac{1}{2}$  pierwiastek trzykrotny: 0; pierwiastek czterokrotny: 3

B 179 a) 2 pierwiastek jednokrotny, 2 pierwiastek sześciokrotny b)  $\frac{1}{2}$  pierwia-

stek jednokrotny,  $\frac{1}{2}$  pierwiastek pięciokrotny

B 180 1 pierwiastek czterokrotny

B 181 2 pierwiastek jednokrotny

B 182 a) pierwiastek jednokrotny b) pierwiastek dwukrotny

B 187 a) 0 lub 0 b) 0 lub 0 c) 0 lub 0 d) 0 lub 0

B 188 a) 3 b) 3 c) 12 d) 8

c)  $a = 54, b = 36$  d)  $(a = 60, b = 125)$  lub  $(a = 60, b = 125)$

B 189 a)  $a = 2, b = -8$  b)  $a = 5, b =$

B 190 a)  $a = 2, b = -1$  b)  $a = 4, b = 1$

B 191 a)  $a = 4, b = 4, c = 3$  b)  $a = 6, b = 4, c = 8$

B 192 a)  $\frac{2}{3}$  pierwiastek dwukrotny,  $\frac{2}{3}$  pierwiastek jednokrotny b)  $\frac{1}{3}$

B 193 a)  $\frac{1}{3}$  pierwiastek dwukrotny,  $\frac{1}{3}$  pierwiastek jednokrotny b) jeśli  $k = 4$

to pierwiastkiem trzykrotnym jest 2, jeśli  $k = 1$  to pierwiastkiem trzykrotnym jest  $\frac{1}{2}$

B 194. Wielomian ma: tylko jeden pierwiastek jednokrotny, gdy  $p \in \{-9, 3\}$ , jeden pierwiastek dwukrotny, jeden jednokrotny, gdy  $p \in \{-9, 3, 7\}$ , trzy pierwiastki jednokrotne, gdy  $p \in \{-\infty, -9\} \cup \{3, 7\} \cup \{7, +\infty\}$ .

B 195. Wielomian ma: tylko jeden pierwiastek dwukrotny, gdy  $p = -5$ ; 3) dwa pierwiastki dwukrotne, gdy  $p = -5$ ; jeden pierwiastek czterokrotny, gdy  $p = 3$ ; dwa pierwiastki jednokrotne, jeden dwukrotny, gdy  $p \in \{-1, -5\} \cup \{3, +\infty\}$ .

### Rozkładanie wielomianów na czynniki

B 196 a)  $(3x - 1)(3x + 1)(25x^2 + 1)$  b)  $(x - 1)^2(x + 1)^2$  c)  $-(5x^2 + 2)(5x^2 + 2)$

d)  $3x^2 - 2(3x + 2)(9x + 4)$  e)  $3(x - 5)(x + 1)$  f)  $(x - 6)(5x - 4)$

B 197 a)  $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5)$  b)  $(2x + 3)^2$

c)  $(1 - 2x)(1 - 2x + 4x^2)$  d)  $(4x - 5)(35x^2 - 30x + 25)$

e)  $-(x + 3)(7x^2 - 20x + 25)$  f)  $(x - 1)(19x^2 + 7x + 3)$

B 198 a)  $x^2 - 2x - 3$  b)  $x^2 - 2x - 3$  c)  $3x + 1)(x - 4)$

d)  $5x^2 - 4x - 7$  e)  $(x + 2)(x - 3)$  f)  $(x - 4)(x - 3)$

B 199 a)  $5(x + 1)(x - 0,4)$  b)  $7(x - 2)(x + 2)(x - 0,5)$  c)  $14x - 1)(x - 1)$

d)  $(x - 5)(x + 1)(x - 2)$  e)  $x(x + 1)$  f)  $x^2 - 3)(x - 2x - 3)$

B 200 a)  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$  b)  $(a + b)(a - y)$  c)  $(x + y)(x - y)$

d)  $(x + y)(x - y)$  e)  $2x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$  f)  $3a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

B 201 a)  $(x - 3)(x - 2)(x - 2)$  b)  $2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$  c)  $x^2 - 2(x - 4)$

d)  $x^2 - 1)(x + 1)$  e)  $x^2 - 2x - 1)(2x - 1)$  f)  $(x - 2)(x - 1 - 3x)$

B 202 a)  $(9x - 4)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$  b)  $(5x - 4)(x - 2)$  c)  $x - 1$

c)  $4x^2 - 1)(2x - 1)(x - 1)$  d)  $4(x - 1)(x - 2)$  e)  $(3x - 2)(x - 3)(x - 3)$  f)  $2x + 3)(5x - 4)$

B 203 a)  $(3x - 4)(2 - x)(2 + x)$  b)  $(2x - 3)(2x + 3)(5x + 3)$

c)  $1 - 2x)(2x + 3)$  d)  $3x - 8$  e)  $x^2 - 2x + 1)(x - \sqrt{2})$

f)  $x^2 - 2x + 1)(x - \sqrt{2})$  g)  $x^2 - 2x + 1)(x - \sqrt{2})$

h)  $x^2 - 2x + 1)(x - \sqrt{2})$  i)  $x^2 - 2x + 1)(x - \sqrt{2})$

B 204 a)  $(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$  b)  $(x + 3)(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

c)  $x^2 - 1)(x - 3)(x^2 - 3x - 9)$  d)  $x^2 - 1)(5x - 2)(25x^2 - 10x - 4)$

e)  $(x + 1)(2x - 1)(4x - 2x + 1)$  f)  $3x + 2)(x - 2)(x - 2x - 4)$

B 205 a)  $(x - 2)(x - 2)$  b)  $x^2 - 3)(x - 1)$  c)  $x^2 - 5x - 2$

d)  $3x - 4)(x - 3x - 4)$  e)  $2x + 3)(x - 4x - 1)$  f)  $2 - x)(4x - 9)$

B 206 a)  $(x + 1)(x + 1)(x - 2)$  b)  $x^2 - 5)(3x - 2)$  c)  $x^2 - 4)(x - 1)(x - 1)$

d)  $x^2 - 2)(x + 2)(x - 1)$  e)  $x^2 - 2x - 1)(x + 1)(x + 1)$  f)  $3x + 1)(x + 1)(x + 1)$

B 207 a)  $(x + 2)(2x - 1)(x - 1)$  b)  $(x + 1)(x - x - 4)$  c)  $(x + 1)(x - 2)(3x - 1)$

d)  $x^2 - 1)(x - 5)$  e)  $(2x - 3)(x + 2)(x - 1)$  f)  $(x - 1)(x - 3)(3x - 1)$

B 208 a)  $(x + 1)(x + 2)(x + 5)$  b)  $2x - 1)(x - 1)$  c)  $(2 - 4x - 16x - 20x - 13)$

d)  $x^2 - 3)(x - 2)$  e)  $x(5x - 2)(x - 1)$  f)  $3x - 2)(x - 3)(x - 3)$

B 209 a)  $x - 3)(x - 5)$  b)  $4 - 2x - 3)(x - 2)$  c)  $5(4x - 5)(x - 2)(2x - 1)$

d)  $2(x - 2)(x - 4)$  e)  $(x - 3)(3x - 9x - 3)$  f)  $(2x + 3)(x - 1)(x - 1)$

B 210 a)  $(x - 1)(x + 1)(2x^2 + 1)$  b)  $(x + 3)(x + 1)(2 - x)(x - 3)$

c)  $x^2 - 1)(x - 2)(x - 1)(x - 2x + 4)$  d)  $x^2 - 1)(x - 6)$

e)  $x^2 - 1)(x - 1)(x - 2)$  f)  $x^2 - 1)(x - 2)(x - 3)$

B 211 a)  $x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$  b)  $3x - 1)(x - 1)(x - 1)$

c)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$  d)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

B 212 a)  $x^2 - 1)(x - 1)(x - 1)$  b)  $3x - 1)(x - 1)(x - 1)$

c)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$  d)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

B 213 a)  $x^2 - 1)(x - 1)(x - 1)$  b)  $3x - 1)(x - 1)(x - 1)$

c)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$  d)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

B 214 a)  $x^2 - 1)(x - 1)(x - 1)$  b)  $3x - 1)(x - 1)(x - 1)$

c)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$  d)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

B 215 a)  $x^2 - 1)(x - 1)(x - 1)$  b)  $3x - 1)(x - 1)(x - 1)$

c)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$  d)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

B 216 a)  $x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$

b)  $(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)(x - 4)(x + 4)(x - 5)(x + 5)$

c)  $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$

d)  $(2x-3)^2(x^2+4)$

e)  $\frac{1}{2}(x+1)(2x^2-3x+3)$

f)  $\frac{1}{4}x^2-11(x+3)x-2$

8.214 a)  $W(x) = x^3 - (x+1)(x+x+3)$  b)  $W(x) = \sqrt{x} - x - 4 \cdot x - 2x - 3$

Równania wielomianowe

8.215 a)  $x = 2$  b)  $x = -4$  c)  $x = \frac{1}{3}$  d)  $x = \frac{1}{3}$

e)  $x \in [-2, 2]$  f) równanie sprzeczne

8.216 a)  $x \in [-5, \frac{1}{2}]$  b)  $x \in [\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 2, 2+\sqrt{3}]$  c)  $x \in [3-\sqrt{7}, 3+\sqrt{7}, 0, \frac{1}{2}]$

d)  $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}$  e) równanie sprzeczne f)  $x = 4, 3, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 4$

8.217 a)  $x \in [\frac{1}{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2]$  b)  $x \in [\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}, 3]$  c)  $x \in [3, 3, 4, 2]$

d)  $x \in [0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  e)  $x \in [0, 1, 1]$  f)  $x \in [2, \frac{1}{3}]$

8.218 a)  $x = 1, 1$  b)  $x = 2, \frac{1}{2}, 2$  c)  $x = 2$

d)  $x \in [-1, 5]$  e)  $x \in [-4, \frac{3}{2}, 4]$  f)  $x = \sqrt{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{2}$

8.219 a)  $x \in [0, 3]$  b)  $x \in [-\frac{2}{3}, 1]$  c)  $x \in [-1, \frac{1}{3}]$

d)  $x = 4, \sqrt{5}, 0, \sqrt{5}$  e)  $x = 7, 1, 2$  f)  $x = \sqrt{5}, 1, 0, \sqrt{2}$

8.220 a)  $x \in \{-2, 2\}$  b) równanie sprzeczne c)  $x \in [-1, 2]$

d)  $x = 2, 2, 1, 1, \sqrt{2}$  e)  $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}$  f)  $x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

8.221 a)  $x \in [-1, \frac{1}{2}]$  b)  $x \in [\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3]$

c)  $x \in [3, 1, 4]$  d)  $13x = -x - 12x$

e)  $x = -3$  wskazówka:  $5x = -9x + 4x$

f)  $x = \frac{1}{2}, 1$  g)  $x = \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 2$

8.222 a)  $x \in [-6, 4, 2]$  b)  $x = 1, 3, 5$  c)  $x = 1, \frac{3}{2}, 3$

d)  $x \in [-1, 2, 3]$  e)  $x = 2, 6, 1$  f)  $x \in [\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 5]$  Skorzystaj

z twierdzenia o całkowitych pierwiastkach wielomianu.

8.223 a)  $x = 3, 1, 1, 5$  b)  $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 2$  c)  $x = 2$

d) równanie sprzeczne e)  $x = 1, 1, 1, \frac{1}{4}$

8.224 a)  $x \in [-5, 0, 5]$  b)  $x = \sqrt{6}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}, \sqrt{6}$  c)  $x \in [-1, 3]$

d)  $x = -1$  e)  $x \in \left\{ \frac{3-3\sqrt{5}}{4}, -2, \frac{3+3\sqrt{5}}{4} \right\}$  f)  $x \in [-5, 1, 4]$

8.225 a)  $x \in [\frac{1}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{6}]$  b)  $x = 2, 1, 0, 1, 2$  c)  $x = 6, 2, 2$

d)  $x = 3, 2\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{3}, \frac{1}{2}$  e)  $x = 1, 1, \frac{1}{2}, 3$  f)  $x = 2, 1, \frac{2}{3}, 2$

8.226 a)  $x \in \left\{ -1, \frac{4}{5}, 1 \right\}$  b)  $x \in [2, 1, \frac{1}{2}]$  c)  $x \in [4, 1, 0, 1, 4]$

d)  $x \in [2, \frac{1}{3}, 1, 3]$  e)  $x \in [-1, 1]$  f)  $x \in [-2, \sqrt{5}]$

8.227 a)  $x = 2, 1, 2, \frac{1}{2}$  b)  $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1$  c)  $x = 6, 0, 5$

d)  $x = 1, \frac{1}{4}, 0$  e)  $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$  f)  $x = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

8.228 a)  $x \in [\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 2]$  b)  $x \in \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$  c)  $x \in \{-2, 0\}$

d)  $x \in [\frac{1}{2}, \sqrt{7}, \frac{1}{2}, \sqrt{7}]$  e)  $x \in [\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 3]$  f)  $x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1]$

Skorzystaj z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu.

8.229 a)  $x = \frac{1}{2}$  b)  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  c)  $x = 1$

d)  $x = 2, 2$  e)  $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$  f)  $x = 1, 2, 2, \frac{1}{2}, 2$

wskazówka Skorzystaj z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu.

$$8.230. a) x = 2 \quad b) x \in \left\{ \frac{-4-\sqrt{5}}{4}, -1, \frac{-4+\sqrt{5}}{4} \right\} \quad c) x \in \{0, 3, 8\}$$

$$d) x \in \left\{ \frac{-5-\sqrt{93}}{6}, -1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\} \quad e) x \in [0, 2] \quad f) x \in [-3, 7]$$

$$8.231. a) x \in \{-2, 1\} \quad b) x \in [-2, 2] \quad c) x \in \{-5, -1, 1, 5\}$$

$$d) x \in [-13, -1, 1, 13] \quad e) x \in \{-2, -1, 9\} \quad f) x \in \{-2, 1, 2\}$$

8.232.  $a = -12$ ,  $b = 6$  **wskazówka** Po podstawieniu w miejsce  $x$  liczby  $1 + \sqrt{3}$  otrzymujemy  
 zbieżność:  $42 + 18\sqrt{3} = -4a - b + (2a + b)\sqrt{3}$ ; stąd  $42 = -4a - b \wedge 18 = -2a - b$ .

### Zadania prowadzące do równań wielomianowych

$$8.233. a) a = -2 \quad b) W(x) = (x-1)(x-3)(x-5)$$

$$8.234. a) a = -1 \text{ lub } a = 1 \quad b) -2 \text{ i } -6 - \text{ pierwiastki jednokrotne, } 0 - \text{ pierwiastek dwukrotny}$$

8.235. **wskazówka** Suma współczynników jest równa 0 wtedy, gdy  $a = 3$ . Rozwiąż równanie  
 $W(x) = 0$  w przypadku, gdy  $a = 3$ .

$$8.236. a) a = 1 \quad b) G(x) = x^2 + x + 4$$

$$8.237. a = 1 \text{ lub } a = \sqrt{2} \text{ lub } a = -\sqrt{2}$$

$$8.238. \{-5 \text{ i } -3\} \text{ lub } \{3 \text{ i } 6\}$$

$$8.239. -5, -2, -3$$

$$8.240. 28 \text{ uczniów}$$

$$8.241. 241$$

$$8.242. 2 \text{ cm, } 4 \text{ cm, } 1 \text{ cm}$$

$$8.243. 10 \text{ cm, } 10 \text{ cm, } 4 \text{ cm}$$

$$8.244. 5 \text{ cm} = 5 \text{ cm lub } 10 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

$$8.245. 7 \text{ m, } 5 \text{ m, } 4 \text{ m}$$

$$8.246. 4, 6, 8$$

$$8.247. 3, 5, 7$$

### Równania wielomianowe z parametrem

$$8.248. a \in \left\{ -3, \frac{3}{4}, \frac{1}{8} \right\}$$

$$8.249. m \in \left\{ -1, 0, \frac{3}{5}, 1 \right\}$$

$$8.250. p \in \left( \frac{8}{9}, 8 \right)$$

$$8.251. k \in \{-1, 7\}$$

$$8.252. a \in \mathbb{R} - \left\{ -5, -4\frac{1}{3}, -3 \right\}$$

$$8.253. m \in (-4, -1)$$

$$8.254. m \in \left( -\infty, \frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{1}{2}, 1 \right) \cup (5, +\infty)$$

$$8.255. k \in \left( \frac{-5-\sqrt{5}}{2}, -3 \right) \cup (-3, -2) \cup \left( -2, \frac{-5+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$8.256. m \in [-2, 2]$$

8.257.  $p = -3$ ; **wskazówka** Równanie przyjmuje postać  $x \cdot [x^2 - (p+3) - 4] = 0$ , więc 0 jest jego rozwiązaniem. Pozostałe rozwiązania  $x_1, x_2$  są rozwiązaniami równania  $x^2 - (p+3) - 4 = 0$  wtedy, gdy  $\Delta > 0$ . Ponadto spełniają one warunek:

$$x_1 \cdot x_2 = -4 < 0, \text{ czyli mają przeciwne znaki. Zatem } 0 \text{ jest średnią arytmetyczną}$$

$$\text{liczb } x_1 \text{ i } x_2.$$

8.258.  $a = 1$ ; **wskazówka** Z pierwszego wzoru Vieta'a dla wielomianów stopnia trzeciego mamy:  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ , stąd liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu. Po wyznaczeniu  $a$  sprawdź, że równanie ma trzy rozwiązania.

$$8.259. p \in \left( -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$8.260. k \in \left( 5\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

8.261.  $a = -3$ ; **wskazówka** Jednym z rozwiązań równania jest liczba 0.

$$8.262. p \in (-2, 3) \cup \left\{ -3\frac{2}{3} \right\}$$

$$8.263. k \in (-5, 0) \cup \left( 0, 1\frac{2}{3} \right)$$

$$8.264. m \in \left( -\infty, \frac{1}{2} \right)$$

8.265.  $m = -5$ ; **wskazówka** Po dokonaniu podstawienia  $t = x^2$  otrzymujemy

$$t^2 + (m+1)t + (m+3)^2 = 0. \text{ Zauważ, że nie może się zdarzyć przypadek } t_1 \cdot t_2 < 0. \text{ Zatem równanie z niewiadomą } x \text{ ma dwa rozwiązania tylko wtedy, gdy równanie}$$

$$\text{z niewiadomą } t \text{ ma jedno rozwiązanie dodatnie.}$$

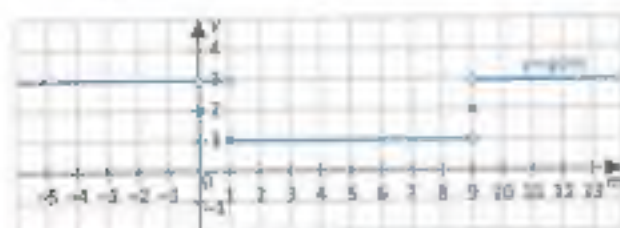
8.266. **wskazówka** Równanie doprowadź do postaci  $(x-2)(x^2 + 2 + m^2) = 0$ .

8.267.  $p = -1$ ; **wskazówka** Uzasadnij, grupując odpowiednio wyrazy, że liczba -2 spełnia to równanie.

8.268. Jeśli  $p \in (-3, 3)$ , to równanie ma jedno rozwiązanie: 1; jeśli  $p = -1$ , to równanie ma dwa rozwiązania: -1 i 1; jeśli  $p \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ , to równanie ma trzy rozwiązania.

**wskazówka** Uzasadnij, grupując odpowiednio wyrazy, że liczba 1 spełnia to równanie.

$$8.269. g(m) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } m \in (1, 9) \\ 2, & \text{jeśli } m \in [0, 9] \\ 3, & \text{jeśli } m \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (9, +\infty) \end{cases}$$



wskazówka: Wielomian  $x^3 + 6x - 7$  rozkłada się na czynniki.

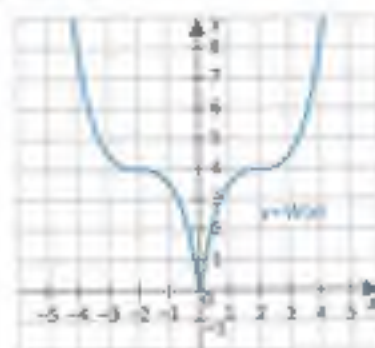
### Funkcje wielomianowe

8.270. a)  $a = -1, b = 3, c = 6, d = -8$  b)  $x \in [-2, 3, 3]$

8.271. a)  $y = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6$  b)  $x \in \{-3, -1, 3\}$

8.272. a)  $y = 6x^4 - 39x^3 + 90x^2 - 84x + 24$  b)  $x \in \left[-3\frac{1}{2}, -2\right]$

8.273. a)  $a = \frac{1}{2}$  b)  $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x$



8.274. a)  $y = x^3 - 5x^2 + 7x$ ; wskazówka:  $W(x) = x(x^2 + bx + c)$ , gdzie  $b^2 - 4c < 0$   
b)  $(-1, -13), (3, 3)$

8.275. a)  $y = \frac{1}{4}(x-1)(x+3)(x^2+2x+5)$  b)  $-3, 1$

8.276. a)  $W(x) = -4x^3 + 12x^2 - 9x + 2$  b)  $R(x) = 1$

8.277.  $W(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 24$ ; wskazówka:  $-2$  jest pierwiastkiem dwukrotnym lub czterokrotnym wielomianu  $W(x)$ , zatem  $W(x) = (x+2)^2(ax^2+bx+c)$ , gdzie  $a \neq 0$ .

8.278. a)  $y = x^4 - 2x^2$  b)  $x \in \{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$

8.279. a)  $x \in (-\infty, -3] \cup [-2, 1]$  b)  $W(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1\frac{1}{3}$  c)  $x \in \{-2, -1, 0\}$

8.280. a)  $W(x) = -(x-1)^2(x+2)$  b)  $x \in (-\infty, -2] \cup \{1\}$  c)  $(-3, 16), (-2, 0), (3, -20)$

8.281. a)  $W(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2$  b)  $G(x) = -\frac{1}{4}(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+5)$

8.282. a)  $W(x) = (x-3)(x^2+3)$

### Nierówności wielomianowe

8.283. a)  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(1\frac{1}{2}, 2\right)$  b)  $x \in \{2\} \cup (5, +\infty)$  c)  $x \in (-3, 1) \cup (1, 2)$

d)  $x \in (-2, 2)$  e)  $x \in (0, 4) \cup \{-2\}$  f)  $x \in \{-2, 0\} \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$

8.284. a)  $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$  b)  $x \in [0] \cup (3, +\infty)$

c)  $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$  d)  $x \in \mathbb{R} - [-2, 3]$

e)  $x \in (-\infty, -3] \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$  f)  $x \in (-3, -1) \cup \{4\}$

8.285. a)  $x \in (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty)$  b)  $x \in (-\infty, 3]$

c)  $x \in (-\infty, -1) \cup \left(1, 3\frac{1}{2}\right)$  d)  $x \in \left(-3, -1\frac{2}{3}\right) \cup (3, +\infty)$

e)  $x \in (-\infty, -3) \cup \left[\frac{1}{2}\right]$  f)  $x \in \left(2\frac{1}{2}, +\infty\right) \cup \{1\}$

8.286. a)  $x \in (-\infty, -4) \cup (2, 3)$  b)  $x \in (1, 3) \cup (5, +\infty)$

c)  $x \in (-\infty, -4) \cup \left(1\frac{1}{2}, 4\right)$  d)  $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-2\frac{1}{2}, 3\right)$

e)  $x \in (3, +\infty) \cup \left[-1\frac{1}{2}\right]$  f)  $x \in \left(-1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

8.287. a)  $x \in \left(1\frac{1}{2}, +\infty\right) \cup [-1]$  b)  $x \in \left(-\infty, -1\frac{2}{3}\right) \cup [2]$

c)  $x \in (-\infty, -5) \cup \{-3, -2\} \cup (1, +\infty)$  d)  $x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{3}\right]$

e)  $x \in (-\infty, -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$  f)  $x \in \{-\sqrt{10}, -2\} \cup (2, \sqrt{10})$

8.288. a)  $D = \mathbb{R}$  b)  $D = (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup [0] \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

c)  $D = (-\infty, 2)$  d)  $D = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup [3]$

8.289. a)  $x \in (-\infty, -1) \cup [0] \cup (1, +\infty)$  b)  $x \in (-4, -1) \cup [-1, 2]$

c)  $x \in [-1] \cup (2, +\infty)$  d)  $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$

e)  $x \in \mathbb{R} - [-5, -3, 3, 5]$  f)  $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$



- 8.290. a)  $x \in (-\infty, -1) \cup [2]$  b)  $x \in (-5, -1) \cup (-1, 4)$   
 c)  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$  d)  $x \in [-8, -6) \cup [-4, 0) \cup [2, 4)$   
 e)  $x \in (-5, 1)$  f)  $x \in (-\infty, 3) \cup (2, +\infty)$
- 8.291. a)  $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup [4, +\infty)$  b)  $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2) \cup (3, +\infty)$   
 c)  $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  d)  $x \in (-2, 3)$   
 e)  $x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (5, +\infty)$  f)  $x \in (-\infty, 1)$

8.292. **wskazówka:**  $L = x^4 + (x^4 - 2x^2 + 1) + (y^4 - 4y + 4) + 1$

8.293. **wskazówka:**  $17x^2 = 16x^2 + x^2$

8.297. **wskazówka:** Wykaż, że  $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x^2 + x^2 + 3 = x^4(x^2 + 3) - 2x^2(x^2 + 3) + (x^2 + 3)$

8.298. **wskazówka:** Wykaż, że  $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 = x^2(x + 1)^2 - 6x(x + 1) + 9$

### Test sprawdzający do rozdziału 8.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	D	C	B	D	D	C	C	D	A

Nr zadania	11	12	13	14	15
Odpowiedź	B	C	A	D	B

### Zadania powtórzeniowe do rozdziału 8.

16.  $f(x) = 6x^3 + 4x - 31$ ; wielomian  $F(x)$  ma dwa pierwiastki.
17. Istnieją:  $a = -2$ ,  $b = -1$
18. a)  $\frac{4\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[3]{5} + 1}{39}$  b)  $\frac{\sqrt[3]{2} + 3}{29}$
19. a)  $W(x) = (1-x)(x-5)(x+5)(1+x+x^2)$ ; pierwiastki:  $-5, 1, 5$   
 b)  $x(x-1)(x-5)(x+6)$ ; pierwiastki:  $-6, 0, 1, 5$
20. a)  $a = 2$  b)  $-4, -1, 2$
21.  $a \in \{-2, -1, 1\}$
22. a)  $a = 4$ ,  $b = 1$  b) pierwiastki całkowite:  $-2, 3$
23. a)  $x = 3\frac{1}{2}$  b)  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  c)  $x \in \left[-3, \frac{4}{3}\right]$  d)  $x \in \left\{\frac{1}{3}, 1, 2\right\}$
24. 425; **wskazówka:** Przedstaw wyrażenie w postaci  $(x+3)(3x^2-1)$  i w miejsce  $x$  podstaw  $2k+1$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .
25. a)  $W(x) = (1-x)(x-4)(x+2)$  b)  $W(x) = -x^3 + 3x^2 + 6x - 8$
30. **wskazówka:** Zapisz kolejne liczby naturalne w postaci:  $4n+1$ ,  $4n+2$ ,  $4n+3$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ . Następnie doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:  
 $(4n+1)^2 + (4n+2)^2 + (4n+3)^2$ .
31. **wskazówka:** Zbadaj różnicę  $\frac{1+4a^2}{4} - a^2$ .
32. **wskazówka:** Doprowadź wyrażenie do postaci:  $-7a^2 - 6a^2 - 1$ .

33. **wskazówka:** Wykaż, że  $(x+3)^2 - (x-1)^2 = 12x^2 + 24x + 28$ ; następnie uzasadnij, że najmniejsza wartość funkcji kwadratowej  $f(x) = 12x^2 + 24x + 28$  jest równa 16.
34. a) Iloraz:  $Q(x) = x^2 + 6x + 2$ ; reszta:  $R(x) = -19x + 28$   
 b)  $W(x) = (x+5)(x+2)(x-1)(x-3)$
35.  $(a=6, b=1)$  lub  $(a=3, b=2)$
36.  $3x + 4$
37. a)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$  b)  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
38.  $m = 2$ ; **wskazówka:** Zauważ, że  $W(-1) = 0$  dla  $m \in \mathbb{R}$ . Następnie skorzystaj z twierdzenia o całkowitych pierwiastkach wielomianu.
40. a)  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$  b)  $x \in (-\infty, -5) \cup (-\sqrt{21}, 0) \cup (1, 4) \cup (\sqrt{21}, +\infty)$
41. a)  $y = 2x^2 - 2x^2 - 2x + 2$  b)  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [1]$
42. a)  $W(x) = (x+1)(x+1)(5-x)$  b)  $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$
43. a)  $p = 1$ ,  $q = 14$  b)  $-29$
44. **wskazówka:** Pierwiastkiem wielomianu jest liczba 3 albo liczba 5. W obu przypadkach otrzymujemy  $a = -7$ .
45. **wskazówka:** Wykaż, że liczba  $2^a - 4$  jest podzielna przez 7. Skorzystaj ze wzoru na  $a^n - b^n$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{N}$ .
46. **wskazówka:** Dane wyrażenie doprowadź do postaci  $(k-1)(k-2)(k-3)$ .
47. **wskazówka:** I sposób: Niech  $x = \sqrt[3]{37\sqrt{10}+117} - \sqrt[3]{37\sqrt{10}-117}$ ;  
 wówczas  $x^3 = \left(\sqrt[3]{37\sqrt{10}+117} - \sqrt[3]{37\sqrt{10}-117}\right)^3$ .  
 stąd  $x^3 = 234 - 3\left(\sqrt[3]{37\sqrt{10}+117} \cdot \sqrt[3]{37\sqrt{10}-117}\right)$ , czyli  $x^3 = 234 - 3x$ . Dana liczba spełnia równanie  $x^3 + 3x - 234 = 0$ . Wykaż, że jedynym rozwiązaniem równania  $x^3 + 3x - 234 = 0$  jest liczba 6.  
 II sposób: Pokazujemy, że  $(3 + \sqrt{10})^3 = 37\sqrt{10} + 117$  oraz  $(\sqrt{10} - 3)^3 = 37\sqrt{10} - 117$ .
48.  $m \in (-5, 1) \cup \{-7\}$
49. a)  $x \in \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right) \cup [2]$   
 b)  $m \in (-\infty, -5) \cup \left(-5, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$
50. Równanie ma: jedno rozwiązanie, jeśli  $m \in (-3, 0)$ ; dwa rozwiązania, jeśli  $m \in [-3, 1]$ ; trzy rozwiązania, jeśli  $m \in (-\infty, -3) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\lg \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos \alpha$	
1°	0,017	0,017	57,290	0,999	89°
2°	0,035	0,035	28,636	0,999	88°
3°	0,052	0,052	19,081	0,998	87°
4°	0,070	0,070	14,301	0,998	86°
5°	0,087	0,087	11,430	0,996	85°
6°	0,105	0,105	9,514	0,995	84°
7°	0,122	0,122	8,144	0,993	83°
8°	0,139	0,141	7,115	0,990	82°
9°	0,156	0,158	6,314	0,988	81°
10°	0,174	0,176	5,671	0,985	80°
11°	0,191	0,194	5,145	0,982	79°
12°	0,208	0,213	4,705	0,978	78°
13°	0,225	0,231	4,335	0,974	77°
14°	0,242	0,248	4,011	0,970	76°
15°	0,259	0,268	3,732	0,966	75°
16°	0,276	0,287	3,487	0,961	74°
17°	0,292	0,306	3,271	0,956	73°
18°	0,309	0,325	3,078	0,951	72°
19°	0,326	0,344	2,904	0,946	71°
20°	0,342	0,364	2,747	0,940	70°
21°	0,358	0,384	2,605	0,934	69°
22°	0,375	0,404	2,475	0,927	68°
23°	0,391	0,424	2,356	0,921	67°
24°	0,407	0,445	2,246	0,914	66°
25°	0,423	0,466	2,145	0,908	65°
26°	0,438	0,488	2,050	0,901	64°
27°	0,454	0,510	1,963	0,895	63°
28°	0,469	0,532	1,884	0,888	62°
29°	0,485	0,554	1,804	0,881	61°
30°	0,500	0,577	1,732	0,866	60°
31°	0,515	0,601	1,664	0,857	59°
32°	0,530	0,625	1,600	0,848	58°
33°	0,545	0,649	1,540	0,839	57°
34°	0,559	0,675	1,483	0,830	56°
35°	0,574	0,700	1,428	0,821	55°
36°	0,588	0,727	1,376	0,809	54°
37°	0,602	0,754	1,327	0,799	53°
38°	0,616	0,781	1,280	0,788	52°
39°	0,629	0,810	1,235	0,777	51°
40°	0,643	0,839	1,192	0,766	50°
41°	0,656	0,869	1,150	0,755	49°
42°	0,669	0,900	1,111	0,743	48°
43°	0,682	0,933	1,072	0,731	47°
44°	0,695	0,966	1,036	0,719	46°
45°	0,707	1,000	1,000	0,707	45°
	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\lg \alpha$	$\sin \alpha$	$\alpha$